Universidade de Aveiro Departamento de Educação
2011

Marisa Alexandra Ferreira Dias

A Programação Linear no Ensino Secundário

Universidade de Aveiro Departamento de Educação
2011

Marisa Alexandra Ferreira Dias

A Programação Linear no Ensino Secundário

Relatório Final da Prática de Ensino Supervisionada apresentado à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Ensino de Matemática no 3º Ciclo do Ensino Básico e no Secundário, realizada sob a orientação científica da Doutora Maria Teresa Bixirão Neto, Professora Auxiliar do Departamento de Educação da Universidade de Aveiro.

Dedico este trabalho aos meus pais,

José Dias e Dora Ferreira

e aos meus irmãos,

Hugo Dias e Susana Dias.

o júri

presidente

Professora Doutora Isabel Maria Cabrita dos Reis Pires Pereira
Professora Auxiliar da Universidade de Aveiro

Professora Doutora Maria Cecília Rosas Pereira Peixoto da Costa
Professora auxiliar da Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro

Professora Doutora Maria Teresa Bixirão Neto
Professora Auxiliar da Universidade de Aveiro

agradecimentos

Quero expressar os meus sinceros agradecimentos a todos aqueles que, de alguma forma, me ajudaram e incentivaram.
Em primeiro lugar, quero agradecer à Doutora Teresa Neto, minha orientadora, por todas as sugestões, pela disponibilidade, críticas construtivas e pela confiança que sempre manifestou durante todo este percurso.
À professora Isabel Órfão, minha orientadora da Prática de Ensino Supervisionada, pelo seu apoio, sugestões, incentivo e disponibilidade. Ao professor Sérgio Carlos, pela sua disponibilidade e ajuda prestada.
À minha família e amigos, pela coragem, confiança, compreensão, apoio e amor, em especial, à minha mãe. Muito obrigado.

palavras-chave

Programação linear, Ensino Secundário, Didáctica da Matemática, Tecnologia

resumo

O ensino da Matemática, tradicionalmente a disciplina em que os alunos apresentam menor sucesso educativo, é também a disciplina que maior contribuição pode dar para a resolução dos muitos problemas do quotidiano. A forte ligação entre a ciência e a tecnologia, diariamente utilizada nas escolas, é hoje, um meio basilar para a iniciação e consolidação de conhecimentos, essenciais na aquisição de competências por parte dos alunos.
Os problemas de Programação Linear oferecem a possibilidade de aferir a aptidão dos alunos para formular um modelo matemático, utilizar geometria analitica na representação e resolução de situações-problema e interpretar as soluções como tomada de decisão num contexto real.
Desta forma, este trabalho propõe identificar e descrever as dificuldades dos alunos, de uma turma do décimo segundo ano do ensino profissional, na realização de uma tarefa que envolve a resolução de problemas de Programação Linear. Para além disso, pretende apresentar fundamentação teórica do tema e explorar recursos computacionais, susceptiveis de utilização em sala de aula.

keywords Linear Programming, High School, Mathematics Education, Tecnology

abstract The teaching of Mathematics, which is traditionally a subject at which students tend to be least successful at, is a subject which can greatly contribute towards the resolution of many everyday problems. The strong connection between science and technology, used on a daily basis in schools, is also the basis for the acquisition and consolidation of knowledge, which is essential to the students' acquisition of competencies.

The problems of Linear Programming offer the possibility of assessing students' aptitude in finding, through Mathematics and by using analytical geometry the appropriate method of presenting, problem solving and interpreting solutions and as decision making within a realist context.

The aim of this work is to identify and describe the difficulties faced by, a class of students in the twelfth year of a professional/vocational course,

in completing a task which involved resolving problems of Linear Programming. It also aims to present fundamental theory on this theme as well as to explore computer resources which can be used in a classroom environment.

Índice

Lista de Figuras

Lista de Quadros

Lista de Gráficos

Capítulo 1. Introdução

Sabemos que a matemática está sempre presente no nosso dia-a-dia, na nossa rotina diária; logo ao iniciar o dia, observamos o relógio, utilizamos linguagem matemática e conhecimentos matemáticos que levaram séculos a construir. Se pensarmos no trabalho, o médico, quando tem de interpretar um electrocardiograma, usa modelos matemáticos, o pedreiro, para construir ângulos rectos, utiliza um método prático, já conhecido pelos antigos egípcios…, temos assim a matemática do médico, a matemática do pedreiro, a matemática que cada indivíduo necessita na sua vida quotidiana.

"A matemática não se reduz a ciência isolada platonicamente de tudo o resto. É também um instrumento ao serviço do homem nos mais variados ramos da ciência e da técnica. O professor deve sempre ter presente este facto e tentar estabelecer, sempre que possível, as conexões da matemática com outros domínios do pensamento, atendendo a que muitos dos seus alunos irão ser físicos, químicos, biólogos, geólogos, engenheiros, economistas, agrónomos ou médicos" (Silva, 1975, p. 12).

A educação matemática deve ter como objectivo desenvolver competências que levem os alunos a apreciar o valor e a natureza da disciplina, a ter contacto com as ideias e os métodos fundamentais e a desenvolver a capacidade de usar a matemática para analisar e resolver problemas, para raciocinar e comunicar.

Se é importante que os alunos adquiram competências também é importante que saibam aplicar esse conhecimento, isto é, que obtenham habilidade em usar a matemática. Na procura de uma forma de auxiliar os professores a desenvolverem as competências dos seus alunos, várias tendências educativas surgem e são desenvolvidas, no pressuposto que a construção e utilização do conhecimento matemático, não são usadas apenas por matemáticos, engenheiros ou cientistas, mas também por todos os grupos sociais que desenvolvem habilidades como contar, medir, representar, desenhar, jogar e explicar conforme as suas necessidades e interesses.

O conteúdo, Programação Linear, inserido no programa das disciplinas de Matemática A do 11º ano e Matemática B do 12º ano do Ensino Secundário e no módulo B4 (designado por Programação Linear) no Ensino Profissional, como tema obrigatório desde o ano lectivo de 2004/2005, é uma aplicação simples, mas essencial, da álgebra ao mundo real; além disso, permite desenvolver o cálculo algébrico, a geometria analítica e a modelação matemática.

O contexto destes problemas oferece a possibilidade de aferir a aptidão dos alunos para formular um modelo matemático, utilizar geometria analitica na representação e resolução de situações-problema e interpretar as soluções como tomada de decisão num contexto real.

A selecção do tema, apresentado neste estudo, deveu-se ao facto da Programação Linear ser um conteúdo bastante apelativo e que permite aos alunos compreender a matemática como uma forma de interpretar a realidade. Nos problemas desta temática surgem situações do quotidiano, que podem conduzir a uma maior motivação e interesse por parte dos alunos, pelo estudo e contribuir para o sucesso na aprendizagem.

1.1. Finalidades e questões de investigação

Ao contribuir para o desenvolvimento de competências matemáticas dos alunos e na medida em que permite estabelecer uma ligação entre o mundo real e a matemática, a resolução de problemas de Programação Linear é abordada neste trabalho através da selecção de uma tarefa e da sua análise relativamente às dificuldades de compreensão do texto (enunciado), grau de complexidade das questões, contexto apelativo, dificuldades matemáticas e competências requeridas.

Pretende-se identificar e descrever as dificuldades reveladas pelos alunos, durante a exploração da tarefa e analisar a forma como os alunos utilizam os conhecimentos matemáticos, na resolução de problemas de Programação Linear (PL).

Ao expor os fundamentos teóricos do conteúdo programático, Programação Linear, pretende-se disponibilizar a professores e alunos um estudo teórico do referido tema e ilustrar o processo de formulação e os métodos de determinação da solução óptima de um problema.

A utilização da tecnologia em sala de aula é um meio óptimo na abordagem e resolução deste tipo de problemas; deste modo, são apresentados e explorados *softwares,* disponibilizados gratuitamente, que podem ser utilizados em contexto de sala de aula.

Este trabalho procura dar resposta às seguintes questões de investigação:

- Que tipo de dificuldades apresentam os alunos na resolução de problemas de Programação Linear?
- Quais as vantagens do computador e de que forma podemos utilizá-lo na exploração da Programação Linear?

1.2. Estrutura do trabalho

Este trabalho é composto por quatro capítulos. O primeiro capítulo, *Introdução,* do qual este ponto é parte integrante, apresenta a definição do problema de investigação, a motivação que conduziu à sua realização, as finalidades e questões de investigação e, por último, a descrição da forma como se estruturou este trabalho.

O segundo capítulo, *A Programação Linear no Ensino Secundário*, encontra-se subdividido. No primeiro subcapítulo, *A Programação Linear nos Programas de Matemática do Ensino Secundário,* é feita a inserção do tema nos programas de matemática e referidos objectivos, indicações metodológicas e competências matemáticas a desenvolver. No segundo subcapítulo, *A tecnologia na sala de aula,* refere-se o papel da tecnologia como uma ferramenta essencial na educação matemática.

O terceiro capítulo, *A Programação Linear,* apresenta introdutoriamente a definição, a aplicação e a categorização dos tipos de problemas de Programação Linear (PL) e encontra-se dividido em quatro subcapítulos. O primeiro subcapítulo, *Breve Referência Histórica,* apresenta a contextualização histórica da Programação Linear e no segundo subcapítulo, *O modelo de Programação Linear,* são apresentadas a formulação matemática de um problema e as hipóteses a satisfazer pelo mesmo. No terceiro subcapítulo, *Conceitos e Propriedades Fundamentais da Programação Linear,* abordam-se alguns conceitos e resultados fundamentais da Álgebra Linear, bem como os principais fundamentos teóricos da PL. No quarto subcapítulo, *Resolução de um problema de Programação Linear*, ilustra-se, através de um exemplo concreto, o método analítico e o método gráfico de resolução. É também explorado o uso do computador, nomeadamente, a folha de cálculo e o *WinQSB* na resolução deste tipo de problemas, salientando as principais vantagens e desvantagens da sua utilização.

O quarto capítulo, *Uma experiência em contexto de sala de aula*, encontra-se dividido em três subcapítulos. O primeiro, *Aspectos metodológicos do estudo*, faz o enquadramento do contexto desta investigação e a caracterização da escola e da turma. No segundo, *Tarefa de Programação Linear*, são apresentados a tarefa seleccionada, bem como uma proposta de resolução para a mesma, os conhecimentos prévios e os objectivos de aprendizagem. Por último, em *Análise e interpretação dos dados recolhidos*, analisam-se as resoluções apresentadas pelos alunos.

Finaliza-se o trabalho, apresentando as conclusões, de acordo com as questões investigativas, as limitações do estudo e a bibliografia.

Capítulo 2. A Programação Linear no Ensino Secundário

2.1. A Programação Linear nos Programas de Matemática do Ensino Secundário

O tema Programação Linear aparece oficialmente, pela primeira vez, nos Anos Propedêuticos 1978/1979 e 1979/1980 do Curso Complementar do Ensino Secundário. Sebastião e Silva (1975, p. 71) considerava que a inclusão da Programação Linear ou não linear, no ensino liceal com um carácter elementar, estava a tornar-se cada vez mais imperiosa, pois problemas desta área surgiam com uma maior frequência em Investigação Operacional, nomeadamente, na área da Economia.

No ano lectivo 1980/1981, começa a funcionar o 12º ano, o tema é então retirado, surgindo, novamente, como um conteúdo facultativo, no Programa de Matemática de 1995, que entrou em vigor no ano lectivo 1997/1998. Apesar do Programa não apresentar qualquer indicação metodológica para a exploração deste tema, a Brochura de Geometria do Ensino Secundário do 11º ano propõe uma abordagem geométrica para a resolução deste tipo de problemas, no qual o objectivo principal é a motivação dos alunos para a aprendizagem da matemática. Desta forma, sugere que os enunciados expressem problemas reais apelativos e adequados às características das turmas. A exploração deste conteúdo deve ter em conta os seguintes objectivos específicos:

- “a tradução matemática de ideias expressas em linguagem corrente;
- a representação gráfica de sistemas de inequações lineares;
- a conexão entre a solução de um sistema de inequações lineares e um plano factível de produção;
- a ligação gráfica entre uma função objectivo e uma região possível do plano, por forma a obter a “melhor” solução para o problema;
- a interpretação da solução obtida para o problema;
- a análise do impacto, em problemas reais, da adição de novas restrições” (Loureiro, Oliveira, Ralha & Bastos, 1998, p. 70).

Alguns exemplos de problemas de Programação Linear propostos são baseados nos tipos de problemas de PL de formação, composição e produção. Como metodologia é sugerido a elaboração de portefólios, projectos individuais e principalmente, a discussão aberta e livre entre professor e aluno.

Reconhecido o potencial para a motivação dos alunos, este tema passa a ser obrigatório com os Programas de Matemática A e B para o 11º ano e 12º ano, respectivamente, homologados em 2002 e que entraram em vigor no ano lectivo de 2004/2005.

O tema da Programação Linear permite que sejam abordados todos os temas transversais, referidos nos Programas de Matemática, que se passa a mencionar:

- Comunicação Matemática;
- Aplicações e Modelação Matemática;
- História da Matemática;
- Lógica e Raciocínio Matemático;
- Resolução de Problemas e Actividades Investigativas;
- Tecnologia e Matemática.

Note-se que com a proposta didáctica de uma *actividade investigativa* de PL, enquadrada devidamente do ponto vista *histórico*, sobre uma *aplicação* real onde o aluno através da *lógica* e do *raciocínio matemático* terá que *modelar* e *resolver* o *problema* usando a *tecnologia* para *comunicar matematicamente* as conclusões que obteve, pode percorre-se todos os temas transversais.

Da leitura do Programa de Matemática A do 11º ano, pode-se retirar as seguintes indicações metodológicas: "A programação linear vai permitir ao estudante aplicar na resolução de problemas de extrema simplicidade e utilidade (e que se apresentam hoje no domínio da Economia) conceitos apreendidos no 10º e ampliados no 11º". O Programa dá ênfase "à análise e interpretação de figuras quer planas quer tridimensionais pois, o estudante, para resolver problemas da vida corrente ou relacionados com áreas da engenharia, arquitectura, … precisa de usar intuição e raciocínios geométricos", sendo da competência do professor assegurar que o estudante "não se limita à manipulação de condições desligadas de situações concretas, sem qualquer esforço de interpretação" (Silva, M. Fonseca, Martins, Fonseca & Lopes, 2002a, p. 4).

No programa de Matemática B para o 12º ano, o tema "Programação Linear" aparece como uma ferramenta de planeamento e gestão. Sugere-se a proposta aos alunos de "situações realistas simples com constrangimentos de produção ou outros que podem ser modelados por inequações lineares" (Silva, M. Fonseca, Martins, Fonseca & Lopes, 2002b, p. 6). O objectivo principal é familiarizar os alunos com situações de gestão, para que estes desenvolvam competências para tomar boas decisões em termos de planeamento. Como objectivos "pretende-se que os estudantes sejam capazes de:

- reconhecer que diferentes situações podem ser descritos pelo mesmo modelo matemático;
- resolver numérica e graficamente problemas simples de programação linear;
- reconhecer o contributo da matemática para a tomada de decisões, assim como as suas limitações" (Silva, M. Fonseca, Martins, Fonseca & Lopes, 2002b, p. 7).

As competências matemáticas que os alunos devem desenvolver com o estudo do módulo B4 de Programação Linear do Ensino Profissional são as seguintes:

- "aptidão para reconhecer as vantagens na escolha de referenciais, no uso das coordenadas e de condições para modelar situações e resolver problemas;
- aptidão para elaborar, analisar e descrever modelos para situações reais, em especial as de planeamento (produção ou outras);
- aptidão para reconhecer sobre os modelos os valores óptimos para cada situação e capacidade para tomar boas decisões;
- capacidade de comunicar oralmente e por escrito as situações problemáticas e os seus resultados;
- capacidade de apresentar de forma clara, organizada e com aspecto gráfico cuidados os trabalhos escritos, individuais ou de grupo, quer sejam pequenos relatórios, monografias;

- capacidade de usar uma heurística para a resolução de problemas" (Silva et al., 2005, p. 70).

Os objectivos de aprendizagem que se pretende que os alunos atinjam são os seguintes:

- "utilizar sistema de coordenadas para obter equações e inequações que representem determinados lugares geométricos (rectas e domínios planos);
- utilizar os estudos gráfico, numérico e analítico de funções afins, com resolução de equações e inequações;
- relacionar os efeitos das mudanças de parâmetros nos gráficos das funções afins, bem como entre os sinais dos coeficientes e a monotonia;
- resolver numérica, graficamente e, com recurso a programas computacionais (na folha de cálculo), problemas de programação linear;
- abordar a história da programação linear como ferramenta de gestão e nos contextos da sua criação e desenvolvimento;
- resolver numérica, gráfica e algebricamente alguns sistemas de equações e inequações;
- utilizar a tecnologia e programas computacionais específicos para a gestão e planeamento;
- reconhecer o contributo da matemática para a tomada de decisões, assim como as suas limitações;
- comunicar, oralmente e por escrito, aspectos dos processos de trabalho e crítica dos resultados" (Silva et al., 2005, p. 71).

Podemos salientar como o aspecto mais inovador dos problemas de programação linear o facto de poderem ser resolvidos por via geométrica, à custa do traçado de rectas. A fase inicial da escolha das variáveis e definição das condições ou restrições é aquela onde o aluno poderá sentir mais dificuldades, como aliás acontece em qualquer outro tipo de problemas. No entanto, estes problemas permitem, por um lado, desenvolver capacidades como a criatividade, o espírito de pesquisa e a abstracção, bem como as capacidades de formular e validar conjecturas e de argumentar com base no raciocínio matemático. Por outro lado, são problemas dirigidos à compreensão de situações reais no domínio da matemática e proporcionam o estabelecimento de conexões entre o estudo analítico e o estudo gráfico de funções.

2.2. A tecnologia na sala de aula

Num mundo global, a tecnologia tem um lugar de destaque e as competências informáticas são, no século XXI, determinantes para a inclusão social e facilitadoras de integração no mercado de trabalho. A tecnologia está presente no dia-a-dia de todos, em diferentes meios e com diferentes graus de complexidade. A escola tem um papel decisivo na preparação de crianças, jovens e adultos, contribuindo para a aquisição de competências, participando na construção de saberes e promovendo uma cidadania activa e participativa.

Silva (1977, p. 93) preconiza que "haveria muitíssimo a lucrar em que o ensino […] fosse […] tanto quanto possível *laboratorial*, isto é, baseado no uso de computadores, existentes nas próprias escolas ou fora destas, em laboratórios de cálculo".

O princípio da tecnologia descrito pelo Nacional Council of Teachers of Mathematics "A tecnologia é essencial no ensino e na aprendizagem da matemática; influencia a matemática que é ensinada e melhora a aprendizagem dos alunos" (NCTM, 2007, p. 26) é um dos seis princípios referidos nos Princípios e Normas para a Matemática Escolar, onde são referidas as indicações consideradas essenciais na selecção, adequação e utilização das diversas ferramentas tecnológicas ao longo de toda a escolaridade.

Segundo o NCTM (2007, p. 27), no ensino da matemática, a utilização de ferramentas tecnológicas e de softwares cuja capacidade de cálculo permite executar procedimentos rotineiros de forma rápida e precisa, facilita o desenvolvimento de conceitos e a modelação matemática. Também a aprendizagem dos alunos é auxiliada pelo feedback que a tecnologia pode proporcionar.

As tecnologias "proporcionam imagens visuais das ideias matemáticas, facilitam a organização e a análise dos dados e realizam cálculos de forma eficaz e exacta. […] Quando se lhes disponibilizam ferramentas tecnológicas, os alunos podem concentrar-se nas decisões a tomar, na reflexão, no raciocínio e na resolução de problemas” (NCTM, 2007, p. 26). Ao utilizar as tecnologias propostas, os alunos devem justificar e interpretar os resultados obtidos.

“A capacidade de cálculo das ferramentas tecnológicas alarga o tipo de problemas acessíveis aos alunos e permite-lhes executar procedimentos rotineiros de forma rápida e precisa, o que deixa mais tempo para o desenvolvimento de conceitos e modelação” (NCTM, 2007, p. 27); consequentemente, a tecnologia permite o aprofundamento dos temas, influenciando a matemática que é ensinada.

Os professores devem maximizar o potencial da tecnologia, permitindo assim desenvolver a compreensão dos alunos, estimular o seu interesse e desenvolver as suas competências em matemática. Quando a tecnologia é usada estrategicamente, pode proporcionar a todos os alunos, o acesso à matemática. Assim, considera-se que as calculadoras e outras ferramentas tecnológicas, como sistemas de cálculo algébrico, *software* de geometria dinâmica, *applets*, folhas de cálculo e dispositivos de apresentação interactiva, são componentes vitais para uma educação matemática de alta qualidade.

Os manuais escolares do Ensino Secundário apresentam, na sua maioria, problemas de Programação Linear com duas variáveis de decisão e remetem a sua resolução para a representação gráfica da região admissível e, posteriormente, para o cálculo do valor da função objectivo em cada vértice da região ou para a representação de rectas de nível da função objectivo, ou seja, para o método analítico e gráfico. Apesar de existir alguma referência à necessidade de utilizar o computador para resolver problemas do quotidiano, não propõem nem incentivam a sua utilização.

Capítulo 3. A Programação Linear

Podemos definir a Programação Linear como uma técnica matemática para determinar a melhor afectação possível de recursos limitados por várias actividades de uma organização. No entanto, dependendo da área onde é utilizada, encontramos formas diferentes de definir Programação Linear. Para um matemático, a Programação Linear é um método utilizado na resolução de problemas, em que uma função objectivo deve ser maximizada ou minimizada, atendendo às restrições impostas às variáveis envolvidas; para um economista é um método de afectação de recursos limitados, de modo a satisfazer a lei da procura e da oferta de um bem de uma empresa e para um empresário é um instrumento de gestão para a resolução de problemas, para o alcance dos objectivos empresariais.

Esta técnica é utilizada no planeamento e na tomada de decisões, por exemplo, em problemas de orçamentos de capital, concepção de dietas, conservação de recursos, sistemas de transportes, jogos de estratégia e previsão de crescimento económico.

As grandes áreas de aplicação da Programação Linear são: a económica, especialmente a Economia de Empresas onde se situam as aplicações mais férteis e os estímulos mais fortes para os desenvolvimentos teóricos da Programação Linear; a matemática, pois tem impulsionado a obtenção de importantes resultados teóricos e o aperfeiçoamento de técnicas de Análise Numérica e no âmbito militar, onde as aplicações são numerosas, mas normalmente pouco divulgadas por razões de segurança.

Podemos dividir os problemas de Programação Linear em três tipos:

1) **Problemas de Transporte**

   Exemplo de uma aplicação deste tipo de problema: suponha que um sistema de distribuição alimenta n armazéns a partir de m grandes unidades produtoras, conhecendo-se os custos de transporte, a procura prevista para cada armazém e as capacidades (máximas) de produção de cada unidade, determinar o plano de distribuição com menor custo.

   Outras aplicações são a rentabilização de aeroportos, a optimização de tráfego interno ou de comunicação de vários tipos e a planificação dos semáforos de circulação numa cidade.

2) **Problemas de Composição**

Neste tipo de problema destaca-se o seguinte exemplo: conhecendo-se os conteúdos calóricos e vitamínicos de diversos alimentos, bem como os seus preços, pretende-se optimizar a composição da dieta a adoptar, de modo a minimizar o seu custo e a satisfazer níveis mínimos de calorias e vitaminas.

Outras aplicações são a composição de medicamentos, a blindagem de ligas metálicas e combustíveis, as rações de animais e adubos, gelados e produtos alimentares.

3) **Problemas de Formação e Produção**

Considere-se a aplicação clássica deste tipo de problemas: suponha-se que uma fábrica é capaz de produzir n produtos distintos, utilizando m recursos limitados, os quais podem ser horas de trabalho ou tempos de operação de várias máquinas, matérias-primas ou serviços, conhecendo-se o lucro unitário e as quantidades de recursos utilizadas para cada produto, e as quantidades de recursos disponíveis, determinar o plano óptimo de produção com maior lucro.

Outras aplicações são o corte de barras e chapas, a designação de pessoas e tarefas (composição de tabelas de horários) e o planeamento da produção de uma empresa.

3.1. Breve referência histórica

O interesse dos matemáticos pelo estudo dos sistemas de inequações foi muito reduzido até aos anos trinta e quarenta do século XX, privilegiando-se a resolução de sistemas de equações. É também curioso referir que, em geral, os escassos trabalhos sobre sistemas de inequações que se produziram entre 1900 e 1930 não discutiam explicitamente o problema de maximização de uma função linear, muito embora já em 1826 Fourier tivesse manifestado o seu interesse por este tipo de problemas, quer para a Mecânica quer para a Teoria das Probabilidades, designadamente ao estudar o problema da minimização do desvio máximo relativo ao ajustamento de uma solução para um dado sistema de equações.

A expressão, Programação Linear, posteriormente responsável pela generalização Programação Matemática, justifica-se pela preocupação central daqueles que se envolveram neste domínio, em meados do século XX, em estabelecer os programas de acção mais aconselháveis para as operações complexas, em estudo, no campo dos sistemas económicos, de produção industrial ou das intervenções militares. Estes programas deveriam incluir a lista de actividades a desenvolver, a sua sequência, a sua calendarização e os recursos a afectar. A escolha dos programas, implica a definição de critérios que procuram exprimir-se por uma função objectivo, a maximizar ou a minimizar.

Os principais desenvolvimentos teóricos da Programação Linear são devidos a Kantorovich (1939) e a um grupo de cientistas americanos que lançaram as bases da PL entre 1939 e 1951, no qual se devem destacar os nomes de Von Neumann, Harold W. Kuhn e A. W. Tucker na fundamentação teórica, o de George B. Dantzig na formulação do algoritmo resolutivo “Simplex” e os T. C. Koopmans, E. Charnes e W. W. Cooper, no campo das formulações aplicadas de Programação Linear (Dantzig, 1963, p. 12).

A partir de 1951, data em que se realizou o primeiro simpósio sobre PL “*Activity Analysis of Production and Allocation*”, surgiram inúmeros trabalhos, procurando completar as suas bases teóricas, melhorar a eficiência computacional dos seus algoritmos e aperfeiçoar o grau de realismo das suas formulações.

Kantorovich foi galardoado em Outubro de 1975, juntamente com T. C. Koopmans, com o prémio Nobel da Economia. Infelizmente, o trabalho de Dantzig não foi consagrado, por ser considerado demasiado matemático.

Após a II Guerra Mundial, os desenvolvimentos tecnológicos dos computadores e da Informática tornaram-se factores decisivos para a rápida evolução da Programação Linear. Os principais utilizadores do algoritmo *simplex*, para resolver problemas práticos, foram as indústrias química e petrolífera. Um dos problemas era minimizar o custo da produção de gasolina que obedecesse a certos critérios de composição e garantisse determinadas *performances*. Foi por essa via que o campo da Programação Linear cresceu exponencialmente e levou ao desenvolvimento da programação não linear, na qual as inequações e a função objectivo traduzem-se por funções não lineares. Outra extensão do tema de estudo é a programação inteira (combinatória), em que as variáveis só podem tomar valores inteiros. Estas disciplinas podem agrupar-se no grande domínio da Programação Matemática. A Programação Matemática é um ramo da Investigação Operacional (IO); como a própria denominação indica, a IO é a investigação das operações ou actividades duma organização com o objectivo de apoiar processos de decisão e de organização, utilizando modelos matemáticos, estatísticos e algoritmos.

Segundo a Associação Portuguesa de Investigação Operacional (APDIO), a Investigação Operacional “*trata-se de uma ciência aplicada voltada para a resolução de problemas reais,* *em que se procura trazer para o campo da tomada de decisões (sobre a concepção, o planeamento ou a operação de sistemas) a atitude e os métodos próprios de outras áreas científicas. Através de desenvolvimentos de base quantitativa, a* ***Investigação Operacional*** *visa também introduzir elementos de objectividade e racionalidade nos processos de tomada de decisão, sem descurar no entanto os elementos subjectivos e de enquadramento organizacional que caracterizam os problemas*[1]".

As principais características deste ramo científico são: a aplicação do método científico na tomada de decisões, a orientação sistémica, na medida em que o problema é representado e analisado num contexto de um sistema que inclui as suas funções de entrada, de saída e as suas relações comportamentais e a extensibilidade, devido à sua aplicação a várias organizações como economia, indústria, negócios, hospitais e militar.

Os progressos no domínio da informática e dos sistemas de informação contribuíram para o desenvolvimento de novos percursos como a modelação e gestão das organizações, os modelos de previsão, a optimização contínua ou discreta, a análise de redes, a teoria de grafos, os modelos de gestão de projectos e de recursos materiais na área da Investigação Operacional.

Os problemas de Programação Matemática são problemas de maximização ou minimização de funções matemáticas (função objectivo) lineares ou não lineares sobre um determinado domínio, normalmente definido por um conjunto de restrições às variáveis. A resolução de um problema em Investigação Operacional segue os seguintes procedimentos:

1. Formulação do problema;
2. Modelação do problema;
3. Determinação da solução para o problema;
4. Avaliação e decisão tendo em conta a solução encontrada;
5. Implementação da solução.

[1] http://www.apdio.pt/aboutIO.do (consultado a 7 de Fevereiro de 2011)

3.2. O Modelo de Programação Linear

Os problemas de Programação Linear são problemas de Programação Matemática (minimização ou maximização) de funções lineares, satisfazendo um conjunto de restrições igualdades e/ou desigualdades lineares.

3.2.1. Formulação Matemática de um problema de Programação Linear

Começaremos por apresentar a formulação de um tipo específico de problemas de Programação Linear com n variáveis (ou ***actividades***) e m restrições (ou ***recursos***). Como será mostrado posteriormente, através de operações elementares, o problema pode ser convertido de uma forma para outra forma equivalente.

Considere o seguinte modelo de um problema de Programação Linear:

$$\begin{array}{ll}
\text{Minimizar} & z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
\text{Sujeito a} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \geq b_1 \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \geq b_2 \\
& \quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad \vdots \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \geq b_m \\
& \quad x_1, \qquad x_2, \quad \ldots, \qquad x_n \geq 0
\end{array}$$

Neste caso, $z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$ é a ***função objectivo*** (ou **função critério** ou função **económica**) a ser minimizada. Os coeficientes $c_1, c_2, \ldots, c_n$ são os ***coeficientes da função objectivo*** (ou **de custo**) e $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são as ***variáveis de decisão*** (ou **variáveis estruturais** ou **níveis de actividade**) a serem determinadas. A inequação $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i$ denota a i-ésima ***restrição*** (ou **restrição funcional** ou **estrutural** ou **tecnológica**). Os coeficientes a_{ij} para $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$ são denominados por ***coeficientes tecnológicos***.

Os coeficientes b_i para $i = 1, 2, \ldots, m$ representam os requisitos mínimos a satisfazer. As restrições $x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$ são as **restrições de não negatividade**. O conjunto das variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$ que satisfazem todas as restrições é denominado ***ponto admissível*** (ou **solução admissível**). O conjunto de todos estes pontos é denominado por ***região admissível***.

Usando a terminologia anterior, um problema de Programação Linear pode ser definido da seguinte forma: de todos os pontos admissíveis, encontrar um que minimize (ou maximize) a função objectivo, a este ponto admissível denomina-se ***solução óptima*** e ao correspondente valor que a função objectivo toma (para a solução óptima) chama-se ***óptimo***.

Exemplo 1:

Considere o seguinte problema linear:

Minimizar $z = 2x_1 + 5x_2$

Sujeito a

$$4x_1 + x_2 \geq 4$$
$$-x_1 + x_2 \geq 1$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

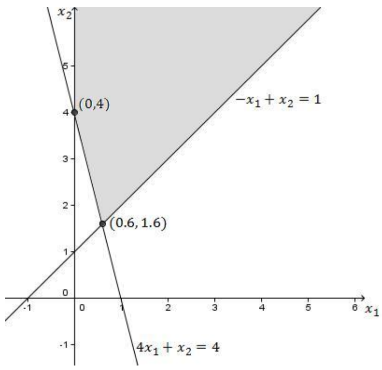


Fig. 1. Ilustração da região admissível do exemplo 1.

Neste caso, temos duas variáveis de decisão x_1 e x_2. A função objectivo a minimizar é $2x_1 + 5x_2$. As restrições e a região admissível estão ilustradas na fig. 1. Portanto, o problema de optimização é encontrar um ponto da região admissível com o menor valor possível para a função objectivo.

Tipicamente, os problemas de Programação Linear apresentam-se na forma padrão ou na forma canónica. Um modelo de Programação Linear diz-se estar na ***forma padrão***, se as restrições são apresentadas na forma de equações e diz-se estar na ***forma canónica***, se as restrições são apresentadas na forma de inequações. No quadro 1 é mostrado estas duas formas, utilizando a notação cartesiana, onde "max", "min" e "$s.a.$" representam respectivamente, "$maximizar$", "$minimizar$" e "$sujeito\ a$".

	Problema de maximização	Problema de minimização
Forma Padrão	$\max z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ $s.a. \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad (i = 1, 2, \dots, m)$ $x_j \geq 0 \qquad (j = 1, 2, \dots, n)$	$\min z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ $s.a. \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad (i = 1, 2, \dots, m)$ $x_j \geq 0 \qquad (j = 1, 2, \dots, n)$
Forma Canónica	$\max \mathrm{z} = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ $s.a. \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i = 1, 2, \dots, m)$ $x_j \geq 0 \qquad (j = 1, 2, \dots, n)$	$\min z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ $s.a. \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \quad (i = 1, 2, \dots, m)$ $x_j \geq 0 \qquad (j = 1, 2, \dots, n)$

Quadro 1. Forma padrão e forma canónica.

Para além da **notação cartesiana**, frequentemente, o modelo de Programação Linear é apresentado, utilizando-se a **notação matricial**. O quadro 2. ilustra estas duas notações para um problema de minimização na forma canónica.

Notação Cartesiana	$\min z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ $s.a. \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \quad (i = 1, 2, \dots, m)$ $x_j \geq 0 \qquad (j = 1, 2, \dots, n)$
Notação Matricial	$\min \qquad z = c^T x$ $s.a. \qquad Ax \geq b$ $\qquad x \geq 0$ onde $c^T = [c_1, c_2, \dots, c_n], x^T = [x_1, x_2, \dots, x_n], \quad A = [a_{ij}]_{i=1,\dots,m;\ j=1,\dots,n}$, $b^T = [b_1, b_2, \dots, b_m]$ e $0^T = [0, 0, \dots, 0]$

Quadro 2. Notação cartesiana e matricial de um problema de minimização

Como foi referido anteriormente, as duas formas padrão e canónica são equivalentes. Com efeito, mediante as seguintes **operações elementares**, é possível reformular qualquer problema de uma forma para outra, sem que o conjunto de soluções se altere.

Operações Elementares

Operação 1: mudança do critério de optimização, ou seja, conversão de um problema de minimização para um problema de maximização e vice-versa:

$$mínimo\ z = -máximo\ (-z)$$

Desta forma, um problema de maximização (minimização) pode ser convertido num problema de minimização (maximização), multiplicando os coeficientes da função objectivo por -1. Após a resolução do novo problema, o valor óptimo do problema inicial é o simétrico do valor óptimo obtido.

Operação 2: transformação de uma restrição de desigualdade do tipo menor " $\leq$ " em uma restrição de desigualdade do tipo maior " $\geq$ ". Neste caso, multiplica-se por -1 cada membro da restrição:

$$\textstyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} -a_{ij}x_j \geq -b_i \qquad (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n)$$

Operação 3: transformação de uma restrição de igualdade em duas restrições de desigualdades equivalentes:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \Leftrightarrow \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} -a_{ij}x_j \leq -b_i \end{cases} \qquad (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n)$$

Operação 4: transformação de uma restrição de desigualdade em uma restrição de igualdade. Considere a restrição de desigualdade do tipo:

$$\textstyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i \qquad (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n)$$

Esta restrição pode ser dada por uma equação, introduzindo-se uma nova variável (*variável de folga ou de desvio*) x_{n+i} de valor não negativo, de forma a "completar" a desigualdade. Obtém-se assim a restrição de igualdade:

$$\textstyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - x_{n+i} = b_i \text{ e } x_{n+i} \geq 0 \qquad (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n).$$

De forma análoga, a restrição de desigualdade do tipo:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i \qquad (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n)$$

é equivalente a

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i \text{ e } x_{n+i} \geq 0 \qquad (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n).$$

Operação 5: transformação de uma variável livre x_j (não restringida pela condição de não negatividade). Nesta situação, pode-se substituir a variável livre por $x_j' - x_j''$ em que $x_j' \geq 0$ e $x_j'' \geq 0$.

Redução à forma padrão (*standard*)

Tendo em conta as operações apresentadas, podemos reduzir um problema de maximização ou de minimização na forma canónica para a forma padrão. Para tal, é necessário converter as restrições funcionais de desigualdade em restrições equivalentes na forma de igualdade (operação 4). As variáveis de folga introduzidas têm coeficiente nulo na função objectivo.

Forma Canónica	**Forma Padrão**
$\min z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$ $s.a.$ $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \geq b_1$ $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \geq b_2$ $\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$ $a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \geq b_m$ $x_1, \quad x_2, \quad \dots, \quad x_n \geq 0$	$\max z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n + 0x_{n+1} + \cdots + 0x_{n+m}$ $s.a.$ $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n - x_{n+1} = b_1$ $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n - x_{n+2} = b_2$ $\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$ $a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n - x_{n+m} = b_m$ $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m} \geq 0$

Quadro 3. Redução de um problema de minimização à forma padrão.

Forma Canónica	**Forma Padrão**
$\max z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$ $s.a.$ $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1$ $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq b_2$ $\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$ $a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m$ $x_1, \quad x_2, \quad \dots, \quad x_n \geq 0$	$\max z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n + 0x_{n+1} + \cdots + 0x_{n+m}$ $s.a.$ $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1$ $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2$ $\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$ $a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m$ $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m} \geq 0$

Quadro 4. Redução de um problema de maximização à forma padrão.

3.2.2. Hipóteses da Programação Linear

Para que um determinado problema possa ser representado por meio de um modelo de Programação Linear, é necessário discutir previamente várias hipóteses, que estão implícitas na formulação de um problema de Programação Linear. As hipóteses são as seguintes:

1. ***Proporcionalidade*.** Quer os coeficientes da função objectivo quer os coeficientes das restrições, devem traduzir fielmente os pesos relativos da grandezas a medir, cujas proporções são fixas, não permitindo qualquer variação, condicionada a intervalos de valor das variáveis. Por exemplo, dada uma variável x_j, a sua contribuição para a função objectivo é $c_j x_j$ e a sua contribuição para a i-ésima restrição é $a_{ij} x_j$. Isto significa que, se x_j for duplicado, também a sua contribuição para o custo e para cada uma das restrições são duplicadas. Para ilustrar, suponha que x_j é a quantidade utilizada para a actividade j. Por exemplo, se $x_j = 10$, então o custo desta actividade é $10c_j$. Se $x_j = 20$, então o custo é $20c_j$, e assim por diante.

2. ***Aditividade*.** Esta hipótese garante que o custo total é a soma dos custos individuais e que a contribuição total para a i-ésima restrição é a soma das contribuições individuais de cada actividade. Não existem efeitos de substituição ou interacção entre as actividades, isto é, esta hipótese impõe uma contribuição independente de cada actividade, quer para o valor da função objectivo quer para as restrições.

3. ***Divisibilidade* e *não negatividade*.** Pressupõe que qualquer actividade considerada num problema possa ser uma grandeza divisível e não negativa; assim, esta hipótese garante que as variáveis de decisão podem tomar qualquer valor positivo de um dado intervalo.

4. ***Linearidade da função objectivo.*** Cada actividade contribui para o objectivo global, ou seja, cada actividade tem associado um determinado lucro ou um determinado custo e esta contribuição para a função objectivo é proporcional ao nível da actividade. A contribuição total é a soma das contribuições de todas as actividades. Esta hipótese está já, de certa forma, incluída na hipótese 1.

3.3. Conceitos e propriedades fundamentais da Programação Linear

Começaremos por apresentar algumas noções elementares de Álgebra Linear, Análise Convexa e Topologia, para a compreensão dos principais aspectos e fundamentos teóricos da Programação Linear. As definições e teoremas apresentados, neste subcapítulo, são adaptados de Ramalhete, Guerreiro & Magalhães (1984, p.135-159) e Castillo (2000, p. 1-13).

Considere o seguinte modelo de um problema de Programação Linear

$$min \qquad z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \qquad \Big\} \text{ Função objectivo}$$

$s.a.$

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\} \text{ Restrições funcionais}$$

$$x_1, \qquad x_2, \quad \ldots, \qquad x_n \geq 0 \qquad \Big\} \text{ Restrições de não negatividade}$$

O sistema das restrições funcionais do problema é constituído por m equações e n incógnitas onde $m \leq n$. Matricialmente, o sistema pode ser escrito da seguinte forma:

$$Ax = b$$

com $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$ e $b \in \mathbb{R}^m$.

Admita-se que a característica da matriz[2] $A_{m\times n} = [a_{ij}]_{i=1,\ldots,m;j=1,\ldots,n}$ do sistema é igual a m, isto é, $c(A) = m$. Então existe uma submatriz quadrada da matriz A de ordem m, $B_{m\times m}$ não singular[3]. A submatriz $B_{m\times m}$ designa-se por ***base*** e as m variáveis correspondentes às suas colunas designam-se por ***variáveis básicas***. As restantes $n-m$ variáveis são denominadas ***variáveis não básicas***. Atribuindo o valor zero às variáveis não básicas, determinaremos os valores das variáveis básicas e a solução assim obtida, designa-se por ***solução básica***. Se a solução básica verificar as restrições de não negatividade, designa-se por ***solução básica***

[2] Chama-se característica de uma matriz A, e denota-se por $c(A)$, ao número máximo de colunas (ou linhas) linearmente independentes.

[3] Uma matriz quadrada diz-se *não singular* se e só se o seu determinante é diferente de zero.

admissível (SBA). Caso as variáveis sejam estritamente positivas, dizemos que a ***SBA não é degenerada***; se alguma das variáveis for zero, designa-se por ***solução básica degenerada***.

Hiperplanos e semiplanos

Definição 1: O conjunto de pontos $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ que satisfazem a equação

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

com $a_1, a_2, \dots, a_n$ e b constantes de $\mathbb{R}$, define um *hiperplano* ortogonal ao vector $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$.

A noção de hiperplano é uma generalização do conceito de plano em $\mathbb{R}^3$ e de recta em $\mathbb{R}^2$ num espaço n-dimensional.

Designando por $H(x)$ este hiperplano, tem-se que:

$$H(x) = \{x \in \mathbb{R}^n : a^Tx = b\}$$

onde a^T representa o vector transposto do vector não nulo $a \in \mathbb{R}^n$ e b um escalar.

Um hiperplano divide $\mathbb{R}^n$ em dois *semi-espaços*

- *abertos*
  $\{x \in \mathbb{R}: a^Tx < b\}$ e $\{x \in \mathbb{R}: a^Tx > b\}$
- *fechados:*
  $H^-(x) = \{x \in \mathbb{R}: a^Tx \leq b\}$ e $H^+(x) = \{x \in \mathbb{R}: a^Tx \geq b\}$.

Conjuntos convexos

Definição 2: Chama-se *combinação linear convexa* de um número finito de pontos $x_1, x_2, \dots, x_n$ ao ponto,

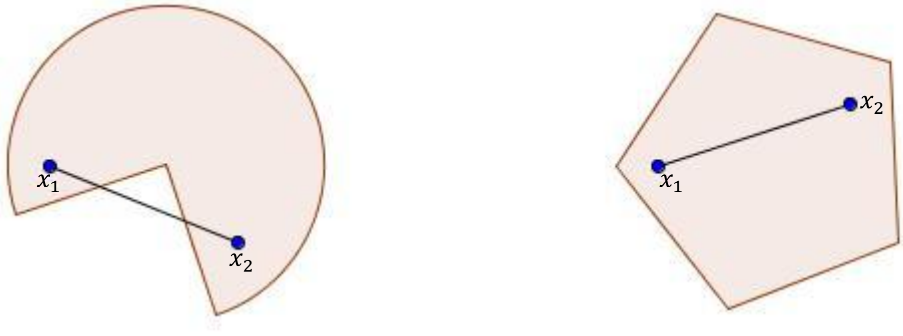
$$x = \lambda_1x_1 + \lambda_2x_2 + \cdots + \lambda_nx_n$$

onde os escalares $\lambda_i \geq 0$ e $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$.

Definição 3: Um conjunto $K \subseteq \mathbb{R}^n$ diz-se que é um *conjunto convexo* se dado quaisquer dois pontos x_1 e $x_2 \in K$ se tem que:

$\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in K$, para todo $\lambda \in [0, 1]$.

Isto é, K é um conjunto convexo se o segmento de recta que une quaisquer dois pontos de K ou toda a combinação linear de dois pontos de K, está contida em K.



Conjunto não convexo **Conjunto convexo**

Fig. 2. Exemplo de conjunto não convexo e conjunto convexo.

O conceito de ponto extremo tem um papel importante na teoria da Programação Linear.

Definição 4: Um ponto x de um conjunto convexo K diz-se um *ponto extremo* de K, se x não pode ser obtido por combinação linear convexa positiva de dois quaisquer pontos de K distintos de x, isto é, se não existem dois pontos $x_1, x_2 \in K$ distintos ($x_1 \neq x_2$) e um escalar $\lambda \in]0, 1[$ tais que $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$.

Da topologia, uma norma em $\mathbb{R}^n$ permite que se definam algumas noções sobre conjuntos. Vamos considerar a norma *euclideana*, $\|x\| = \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2 + \cdots + {x_n}^2}$, com $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Definição 5: Seja $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $r \in \mathbb{R}^+$. Chama-se *bola aberta* de centro x_0 e raio r ao conjunto:

$$B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| < r\}.$$

Analogamente, chama-se *bola fechada* de centro x_0 e raio r ao conjunto:

$$\bar{B}(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| \leq r\}.$$

Definição 6: Um conjunto K é *aberto* em $\mathbb{R}^n$ se e só se

$$\forall x \in K \quad \exists r \in \mathbb{R}^+ \quad B(x,r) \subset K.$$

Definição 7: Diz-se que K é um *conjunto fechado* se e só se o seu complementar ($\mathbb{R}^n \backslash K$) é aberto.

Definição 8: Um conjunto K diz-se *limitado* se e só se está contido em alguma bola aberta, isto é, $K \subset B(x,r)$, onde $x \in \mathbb{R}^n$ e $r \in \mathbb{R}^+$.

Teorema 1: A intersecção finita de conjuntos convexos é um conjunto convexo.

Demonstração:

Sejam K_1 e K_2 dois conjuntos convexos, pretende-se mostrar que $K = K_1 \cap K_2$ é um conjunto convexo.

Sejam x e y dois pontos de K. Como K é a intersecção de K_1 e K_2, x e y pertencem a K_1 e a K_2. Por hipótese, K_1 e K_2 são dois conjuntos convexos, portanto o segmento de recta que une x e y está contido em K_1 e em K_2, estando por isso contido na sua intersecção, K. Logo, K é um conjunto convexo.

Suponha-se agora que a intersecção de n conjuntos convexos é um conjunto convexo, ou seja, $\bigcap_{i=1}^{n} K_i$ é um conjunto convexo onde cada K_i com $i = (1, 2, \dots, n)$ é um conjunto convexo. Pretende-se provar que a intersecção de $n+1$ conjuntos convexos é ainda um conjunto convexo. Seja $K = K_1 \cap \dots \cap K_n \cap K_{n+1}$, onde K_{n+1} é um conjunto convexo. Como, $K = (\bigcap_{i=1}^{n} K_i) \cap K_{n+1}$ e por hipótese, $\bigcap_{i=1}^{n} K_i$ é um conjunto convexo tem-se a situação anterior, isto é, a intersecção de dois conjuntos convexos, que como vimos é um conjunto convexo. Provamos então, que a intersecção finita de conjuntos convexos é um conjunto convexo.$\blacksquare$

Caso os conjuntos considerados sejam fechados, podemos ainda dizer que a intersecção finita de conjuntos convexos fechados é um conjunto convexo fechado, uma vez que a intersecção de uma família de conjuntos fechados é um conjunto fechado.

Definição 9: Dado um conjunto qualquer S, o conjunto de todas as combinações lineares convexas dos seus pontos designa-se *invólucro convexo* e denota-se por $H(S)$.

Teorema 2: A intersecção de todos os conjuntos convexos que contêm S coincide com $H(S)$.

Demonstração:

Seja K a intersecção de todos os conjuntos convexos que contêm S. Queremos provar que $H(S) = K$. Pelo teorema anterior, sabemos que K é um conjunto convexo.

Seja $x \in H(S)$ então existem $x_1, \dots, x_n \in S$ e $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$, com $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ tais que

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n$$

Como $S \subseteq K$ e K é convexo então x é combinação linear convexa de n pontos de K, logo $x \in K$. Portanto $H(S) \subseteq K$.

Sendo K a intersecção de todos os conjuntos convexos que contêm S e $H(S)$ um conjunto convexo que contêm S então $K \subseteq H(S)$.

Conclui-se de $H(S) \subseteq K$ e $K \subseteq H(S)$ que $H(S) = K$.■

Definição 10: O invólucro convexo de um conjunto S com um número finito de pontos designa-se por *politopo* (*poliedro convexo* limitado).

Teorema 3: O hiperplano $H(x)$ definido pela equação $a^T x = b$ é um conjunto convexo fechado.

Demonstração:

Sejam x_1 e x_2 dois pontos pertencentes ao hiperplano $H(x)$. Então, tem-se que:

$$a^T x_1 = b$$
$$a^T x_2 = b$$

Para demonstrar que o hiperplano $H(x)$ é um conjunto convexo, temos que demonstrar que qualquer combinação linear convexa de x_1 e x_2 também pertence a $H(x)$.

Seja $y = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$ com $\lambda \in [0,1]$ uma combinação linear convexa de x_1 e x_2.

Então:

$$
\begin{aligned}
a^T y &= a^T(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \\
&= \lambda a^T x_1 + (1 - \lambda)a^T x_2 \\
&= \lambda b + (1 - \lambda)b \\
&= b
\end{aligned}
$$

o que prova que $y = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in H(x)$, logo $H(x)$ é um hiperplano convexo.

Adicionalmente, podemos afirmar que $H(x)$ é um conjunto fechado, uma vez que o seu conjunto complementar, dado por:

$$\{x \in \mathbb{R}^n : a^T x < b\} \cup \{x \in \mathbb{R}^n : a^T x > b\}$$

é um conjunto aberto (por ser a união de dois conjuntos abertos)[4]. ■

Analogamente, prova-se que os semi-espaços fechados definidos por um hiperplano $H(x)$, $H^-(x)$ e $H^+(x)$, são conjuntos convexos fechados.

Como cada equação de um sistema de m equações lineares define um hiperplano $H(x)$ em $\mathbb{R}^n$, que é um conjunto convexo fechado, então o conjunto K das soluções de um sistema de m equações lineares, que corresponde ao conjunto definido pela intersecção de m hiperplanos $H(x)$, é um conjunto convexo fechado em $\mathbb{R}^n$.

Como cada inequação de um sistema de m inequações lineares define um semi-espaço fechado $H^-(x)$ ou $H^+(x)$ em $\mathbb{R}^n$, que é um conjunto convexo fechado, então o conjunto K das soluções de um sistema de m inequações lineares, que corresponde ao conjunto definido pela intersecção de m semi-espaços fechados, é um conjunto convexo fechado em $\mathbb{R}^n$.

Podemos concluir, que o conjunto definido pelas restrições do problema de Programação Linear, é um conjunto convexo fechado.

[4] Da topologia, sabe-se que a reunião de uma família qualquer de conjuntos abertos é um conjunto aberto.

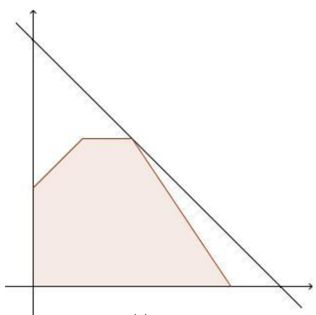
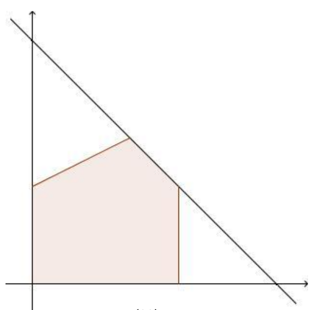
Teorema 4: O conjunto das soluções admissíveis K de um problema de Programação Linear é um conjunto convexo fechado.

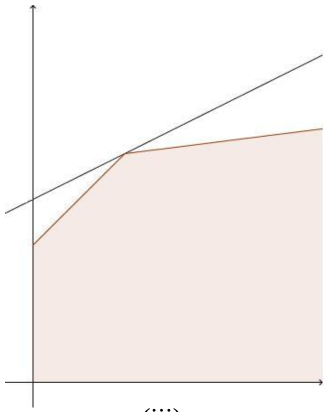
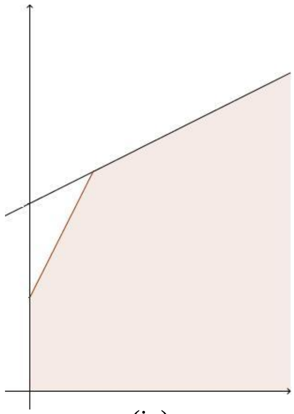
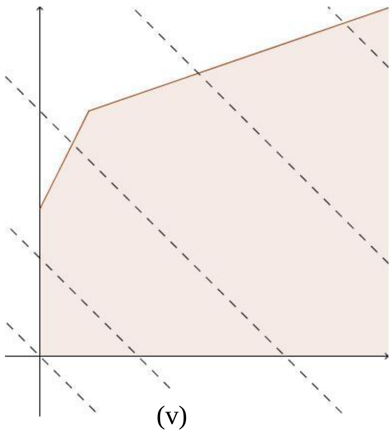
Demonstração:

> Num problema de Programação Linear, qualquer restrição define um conjunto convexo fechado (como visto anteriormente). Uma vez que o conjunto das soluções admissíveis K, de um problema de Programação Linear é a intersecção dos conjuntos definidos por todas as restrições do problema e como a intersecção finita de conjuntos convexos é ainda um conjunto convexo (Teorema 1) e a intersecção de uma família qualquer de conjuntos fechados é ainda um conjunto fechado, então K é um conjunto convexo fechado.■

Este teorema permite dizer que no caso de existir mais de uma solução admissível, então existirá um número infinito de soluções admissíveis, uma que vez que qualquer combinação linear convexa de duas soluções admissíveis é ainda uma solução admissível.

Uma vez que o conjunto das soluções admissíveis K resulta da intersecção de um número finito de semi-espaços, então decorrem as seguintes três situações mutuamente exclusivas:

1. K é vazio	O problema não tem solução.
2. K é não vazio e limitado	O problema tem solução [uma (i) ou mais soluções óptimas (ii)] com valor óptimo finito para a função objectivo.  (i)  (ii) (Para ilustrar, geometricamente, considerou-se $K \subseteq \mathbb{R}^2$)

3. K é não vazio e não limitado	O problema tem solução [uma (iii) ou mais soluções óptimas (iv)]. O valor óptimo da função objectivo pode ser finito ou não ser finito [caso não seja finito (v), dizemos que o problema tem solução não limitada].  (iii)  (iv)  (v) (Para ilustrar geometricamente, considerou-se $K \subseteq \mathbb{R}^2$)

Adaptado de Nascimento (2004, p. 66).

A resolução do problema de Programação Linear consiste em escolher do conjunto das soluções admissíveis, a solução óptima (ou soluções óptimas), ou seja, a solução admissível (ou soluções admissíveis) que optimiza (optimizam) a função objectivo. O teorema 5 permitirá isolar o conjunto das soluções que conterá a solução óptima, caso exista (ou as soluções óptimas, caso existam).

Teorema 5: Uma função linear[5] f, sobre um politopo (poliedro convexo limitado) K, atinge o óptimo[6] num ponto extremo de K. No caso de atingir o óptimo em mais de um ponto extremo, então toda a combinação linear convexa destes pontos corresponde ainda a uma solução óptima.

Demonstração:

Consideremos o problema de Programação Linear:

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & z = c^T x \\ s.a. & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Como por hipótese K é um politopo (poliedro convexo limitado), os seus pontos extremos são em número finito. Sejam $x_1, x_2, \dots, x_p$ os pontos extremos de K.

I Parte: O óptimo é atingido num ponto extremo.

Suponhamos que a solução óptima não é um ponto extremo. Seja x^* a solução óptima (minimizante). Tem-se por definição $f(x^*) \leq f(x)$, para todo $x \in K$.

Como x^* é um ponto qualquer de K e não é ponto extremo, então x^* pode ser obtido por combinação linear convexa dos ponto extremos de K, isto é,

$x^* = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i$ com $\lambda_i \geq 0$ e $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1$

Atendendo a que a função objectivo é linear tem-se que,

$$f(x^*) = f\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f(x_i)$$

Seja x_m o ponto extremo onde a função objectivo toma o menor valor, isto é,

$$f(x_m) = mín\,\{f(x_i)\}, 1 \leq i \leq p$$

[5] "f é uma função linear sobre $\mathbb{R}^n$ se para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, com $x = \alpha y + \beta z$ se tem $f(x) = f(\alpha y + \beta z) = \alpha f(y) + \beta f(z)$.

[6] O óptimo existe, pois uma função contínua sobre um conjunto limitado e fechado tem máximo e mínimo (Teorema de Weierstrass)" (Nascimento, 2004, p. 61).

Então,

$$f(x^*) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f(x_i) \geq \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f(x_m) = f(x_m) \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = f(x_m)$$

Como por hipótese x^* é solução óptima, tem-se uma dupla desigualdade:

$$f(x_m) \leq f(x^*) \leq f(x_m)$$

donde se conclui que $f(x^*) = f(x_m)$.

II Parte: Se f atinge o óptimo em mais de um ponto extremo, então qualquer combinação linear convexa destes pontos extremos é ainda uma solução óptima.

Admitamos que a função atinge o mínimo, a, em mais do que um ponto extremo e sejam $x_1, x_2, \dots, x_q$ esses pontos. Então, $f(x_1) = f(x_2) = \cdots = f(x_q) = a$.

Seja agora x um ponto obtido por combinação linear convexa de $x_1, x_2, \dots, x_q$, isto é,

$x = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i x_i$ com $\lambda_i \geq 0$ e $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1$.

Então, dada a linearidade de f,

$$f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{q} \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i f(x_i) = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i a = a \sum_{i=1}^{q} \lambda_i = a$$

ou seja, qualquer combinação linear convexa de pontos extremos minimizantes é ainda solução óptima. ■

Teorema 6: Um ponto x do conjunto das soluções admissíveis K é ponto extremo se e só se constituir uma SBA do problema de Programação Linear.

Demonstração:

Hipótese: x é um ponto extremo de K.

Tese: x é uma SBA

Seja $x = (x_1, x_2, \dots, x_p, x_{p+1}, \dots, x_n)$ um ponto extremo do conjunto das soluções admissíveis. Suponhamos que as p primeiras componentes de x são positivas $(p \leq m)$, o que não implica perda de generalidade.

Tem-se que

$$x_1a_1 + x_2a_2 + \cdots + x_pa_p = b \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{p} x_ia_i = b \qquad (1)$$

Pretendemos provar que x é SBA, isto é, que os vectores associados a estas p componentes (variáveis) são linearmente independentes. Admitamos que os vectores $a_1, a_2, \dots, a_p$ associados a $x_1, x_2, \dots, x_p$ são linearmente dependentes, então existem $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ não todos nulos tais que

$$\lambda_1a_1 + \lambda_2a_2 + \cdots + \lambda_pa_p = 0$$

Escolha-se um escalar θ tal que:

$$x_i \pm \theta\lambda_i \geq 0, (i = 1, 2, \dots, p) \qquad (2)$$

Multiplicando a equação $\lambda_1a_1 + \lambda_2a_2 + \cdots + \lambda_pa_p = 0$ por θ, vem que:

$$\theta\lambda_1a_1 + \theta\lambda_2a_2 + \cdots + \theta\lambda_pa_p = 0 \Leftrightarrow \theta\sum_{i=1}^{p} \lambda_ia_i = 0 \qquad (3)$$

Somando a relação (3) a (1) tem-se que:

$$\sum_{i=1}^{p} x_ia_i + \theta\sum_{i=1}^{p} \lambda_ia_i = b \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{p} (x_i + \theta\lambda_i)a_i = b \qquad (4)$$

Subtraindo a relação (3) a (1) tem-se que:

$$\sum_{i=1}^{p} x_ia_i - \theta\sum_{i=1}^{p} \lambda_ia_i = b \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{p} (x_i - \theta\lambda_i)a_i = b \qquad (5)$$

Atendendo a (2), (4) e (5), os pontos $x' = x_i + \theta\lambda_i$ e $x'' = x_i - \theta\lambda_i$ constituem também soluções admissíveis do problema, sendo $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)$. Por outro lado, $x = \frac{1}{2}x' + \frac{1}{2}x''$, ou seja, o ponto x pode ser obtido como combinação linear convexa de x' e x'', concluindo-se que x não é um ponto extremo de K, o que contraria a hipótese. O absurdo resultou de se supor que os vectores $a_1, a_2, \dots, a_p$ eram linearmente dependentes, logo os vectores $a_1, a_2, \dots, a_p$ são linearmente independentes e consequentemente, x é uma solução básica admissível do problema de Programação Linear.

Hipótese: x é uma SBA

Tese: x é um ponto extremo de K.

Seja $x = (x_1, x_2, \dots, x_p, 0, \dots, 0)$ uma SBA. Tem-se então:

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 + \cdots + x_p a_p = b, (x_i \geq 0, i = 1, \dots, p)$$

com $a_1, a_2, \dots, a_p$ vectores linearmente independentes. Pretende-se provar que x não pode ser obtido como combinação linear convexa positiva de dois quaisquer pontos de K distintos de x. Admita-se que x não é um ponto extremo de K, então x pode ser obtido como combinação linear convexa de outros dois pontos de K, isto é,

$$x = \lambda x' + (1-\lambda)x'' \quad \lambda \in]0,1[\quad x' \neq x'' \quad x' \; e \; x'' \in K$$

Como x', $x'' \geq 0$ e as últimas componentes de x são nulas, resulta imediatamente que:

$$x' = \left(x'_1, \dots, x'_p, 0, \dots, 0\right)$$

$$x'' = \left(x''_1, \dots, x''_p, 0, \dots, 0\right)$$

Uma vez que x' e x'' são soluções admissíveis (pertencem a K), tem-se:

$$x'_1 a_1 + x'_2 a_2 + \cdots + x'_p a_p = b$$

$$x''_1 a_1 + x''_2 a_2 + \cdots + x''_p a_p = b$$

Subtraindo cada uma das relações anteriores à relação $x_1 a_1 + x_2 a_2 + \cdots + x_p a_p = b$ obtém-se:

$$(x_1 - x'_1)a_1 + (x_2 - x'_2)a_2 + \cdots + \left(x_p - x'_p\right)a_p = 0$$

$$(x_1 - x''_1)a_1 + (x_2 - x''_2)a_2 + \cdots + \left(x_p - x''_p\right)a_p = 0$$

Atendendo a que $a_1, a_2, \dots, a_p$ são vectores linearmente independentes, as relações anteriores verificam-se se e só se:

$$\begin{cases} x_1 - x_1' = 0 \\ x_2 - x_2' = 0 \\ \quad \ldots \\ x_p - x_p' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_1' \\ x_2 = x_2' \\ \quad \ldots \\ x_p = x_p' \end{cases}$$

e,

$$\begin{cases} x_1 - x_1'' = 0 \\ x_2 - x_2'' = 0 \\ \quad \ldots \\ x_p - x_p'' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_1'' \\ x_2 = x_2'' \\ \quad \ldots \\ x_p = x_p'' \end{cases}$$

ou seja,

$$\begin{cases} x_1 = x_1' = x_1'' \\ x_2 = x_2' = x_2'' \\ \quad \ldots \\ x_p = x_p' = x_p'' \end{cases}$$

Logo, x não pode ser obtido por combinação linear convexa de x' e x'', o que contradiz a hipótese. O absurdo resultou de se ter admitido que x podia ser obtido como combinação linear convexa de outros dois pontos distintos de$K$, isto é, de x não ser um ponto extremo de K. Logo, x é um ponto extremo de K. ■

3.4. Resolução de um problema de Programação Linear

Podemos decompor o processo de formulação de um problema de Programação Linear nos seguintes passos:

Passo 1: Compreender o problema.
Passo 2: Definir as variáveis de decisão.
Passo 3: Exprimir o objectivo em função das variáveis de decisão.
Passo 4: Exprimir cada restrição em função das variáveis de decisão.

Para ilustrar o processo de formulação e resolução de um problema de Programação Linear, considere-se o seguinte exemplo:

Problema: *Uma empresa fabrica dois tipos de tecidos em lã, identificados comercialmente como «angorá» e «caxemira». Com a sua venda consegue obter em cada um deles uma margem de lucro de* 4 *e* $3\,u.m.$ *(unidades monetárias), respectivamente, por cada* $100\,m^2$ *produzidos. Neste processo de fabrico são utilizadas duas máquinas que laboram* 12 *e* 14 *horas por dia, respectivamente. Cada* $100\,m^2$ *de tecido «angorá» necessita de 3 horas da primeira máquina e 7 horas da segunda, por sua vez, cada* $100\,m^2$ *de tecido «caxemira» necessita de 4 horas e 2 horas em cada uma das máquinas. A administração da fábrica pretende saber qual a melhor combinação de produção a adoptar, de forma a beneficiar de um lucro global máximo.*

Formulação matemática do problema:

Passo 1: Compreender o problema.

Após a leitura atenta do enunciado do problema, identificar o tipo de problema (maximizar ou minimizar), o objectivo, as restrições e as variáveis de decisão. Elaborar uma tabela ou um esquema que organize e sintetize os dados relevantes, ou ainda, encontrar uma solução trivial, pode ajudar a entender melhor o problema. Os dados do problema podem ser organizados na seguinte tabela:

		Angorá $(\mathbf{100\,m^2})$	**Caxemira** $(\mathbf{100\,m^2})$	**Tempo máximo de utilização das máquinas por dia (horas)**
Tempo necessário de utilização em cada máquina (horas)	Máquina 1	3	4	12
	Máquina 2	7	2	14
Lucro obtido (u. m.)		4	3	

Passo 2: Definir as variáveis de decisão.

Neste problema pretende-se saber a quantidade de tecido «angorá» e «caxemira» a produzir. Designando estas quantidades a produzir pela empresa x e y, respectivamente, tem-se que as variáveis de decisão são:

x – *quantidade de tecido do tipo «angorá» a produzir*

y – *quantidade de tecido do tipo «caxemira» a produzir*

Passo 3: Exprimir o objectivo em função das variáveis de decisão.

Neste problema, pretende-se determinar a melhor combinação de produção, de forma a obter um lucro global *máximo*, logo a função objectivo, z, representa *o lucro global obtido em u. m.* Sendo o lucro obtido proporcional à quantidade de tecido produzido, o contributo obtido pela venda de x ($\times$ $100\,m^2$) de tecido «angorá» é $4x$ ($u.m.$) e de y ($\times$ $100\,m^2$) de tecido «caxemira» é $3y$ ($u.m.$). O lucro global obtido, expresso em $u.m.$, é dado pela função:

$$z = 4x + 3y$$

Passo 4: Exprimir cada restrição em função das variáveis de decisão.

Neste problema, as restrições reflectem as limitações de tempo de utilização de cada máquina na produção dos tecidos por dia. Então, identificam-se duas restrições funcionais, cada uma relativa ao número de horas de utilização de cada máquina na produção dos dois tipos de tecido.

A primeira restrição corresponde à utilização da máquina 1: para fabricar o tecido «angorá» são necessárias 3 horas e para fabricar o tecido «caxemira» são necessárias 4 horas de uso da máquina 1. Deste modo, o tempo gasto a produzir x ($\times$ $100\,m^2$) de tecido «angorá» e y ($\times$ $100\,m^2$) de tecido «caxemira» é dado pela expressão $3x + 4y$. Dado que a máquina 1 só pode ser utilizada 12 horas por dia, a restrição associada é definida pela desigualdade:

$$3x + 4y \leq 12$$

A segunda restrição corresponde à utilização da máquina 2: para fabricar o tecido «angorá» são necessárias 7 horas e para fabricar o tecido «caxemira» são necessárias 2 horas de uso da máquina 2. Deste modo, o tempo gasto a produzir x ($\times$ $100\,m^2$) de tecido «angorá» e y ($\times$ $100\,m^2$) de tecido «caxemira» é dado pela expressão $7x + 2y$. Dado que a máquina 2 só pode ser utilizada 14 horas por dia, a restrição associada é definida pela desigualdade:

$$7x + 2y \leq 14$$

Neste problema não faz sentido considerar a produção de tecido em quantidades negativas, desta forma, as restrições de não negatividade garantem que as variáveis de decisão não tomem valores negativos, tem-se então:

$$x \geq 0 \text{ e } y \geq 0$$

Então, o problema modelizado matematicamente é dado por:

$$\begin{aligned}
&max\ z = 4x + 3y \\
&s.a. \\
&\qquad 3x + 4y \leq 12 \\
&\qquad 7x + 2y \leq 14 \\
&\qquad x, y \geq 0
\end{aligned}$$

Após a formulação matemática do problema pode-se optar por métodos diferentes de resolução. Seguidamente, iremos mostrar a resolução do problema, utilizando o método analítico e o método gráfico.

3.4.1. Método analítico e método gráfico

Os métodos de resolução que serão apresentados, seguidamente, utilizam-se quando o problema se restringe a duas variáveis de decisão. O processo de resolução pode ser sistematizado em duas fases:

1ª Fase) Determinação da região admissível, ou seja, o conjunto das soluções admissíveis do problema. Como já vimos anteriormente, cada restrição define um semi-espaço e a região admissível é o conjunto dos pontos que resulta da intersecção dos semi-espaços definidos pelas restrições do problema. Em $\mathbb{R}^2$, a região admissível é o conjunto dos pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ que resulta da intersecção dos semiplanos definidos pelas restrições funcionais e as de não negatividade.

2ª Fase) Determinação da solução óptima. Nesta fase, pode-se optar pelo método analítico ou pelo método gráfico.

Considere-se o problema anterior:

1ª Fase) Comecemos por construir um sistema de eixos cartesianos x, y. Pretendemos determinar a região admissível que é dada pelas restrições do problema.

As restrições de não negatividade restringem o problema aos pontos (x, y) que estão situados no 1º Quadrante. O conjunto de pontos definidos pela restrição $3x + 4y \leq 12$ encontram-se abaixo ou sobre a recta de equação $3x + 4y = 12$ e o conjunto de pontos definidos pela restrição $7x + 2y \leq 14$ encontram-se abaixo ou sobre a recta de equação $7x + 2y = 14$. A região admissível é o conjunto de pontos do plano que corresponde à intersecção dos domínios planos definidos por todas as inequações, ou seja, que satisfazem todas as restrições, isto é, $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3x + 4y \leq 12 \wedge 7x + 2y \leq 14 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0\}$. Graficamente,

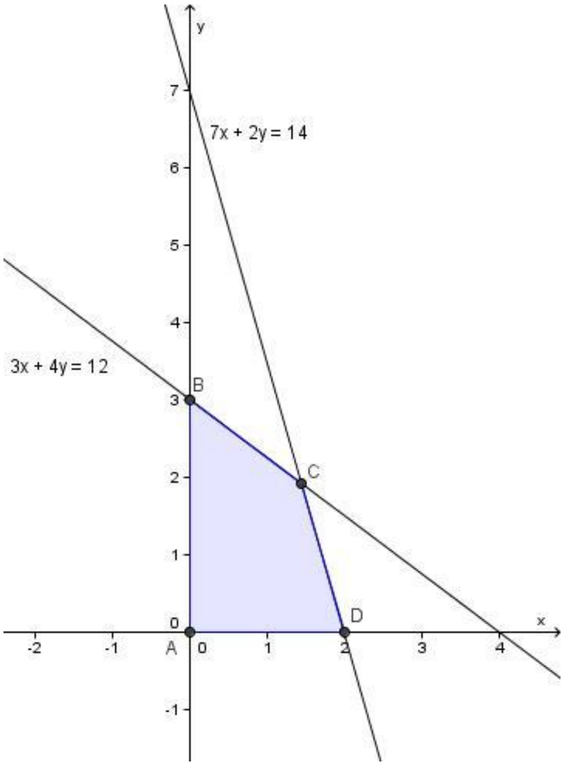


Fig. 3. Ilustração da região admissível do problema.

2ª Fase) *Método analítico*: consiste em determinar as coordenadas de cada vértice da região admissível e, posteriormente, o valor da função objectivo correspondente a cada vértice. Este método envolve a resolução de vários sistemas de equações lineares constituídos pelas rectas que se intersectam em cada vértice.

Os vértices da região admissível são os pontos A, B, C e D. O ponto A tem coordenadas $A(0,0)$, uma vez que coincide com a origem. O ponto B é a intersecção da recta $3x + 4y = 12$

e o eixo das ordenadas, logo as coordenadas de B são $B(0,3)$. O ponto D é a intersecção da recta $7x + 2y = 14$ e o eixo das abcissas, logo as coordenadas de D são $D(2,0)$. O ponto C é o ponto de intersecção das rectas de equação $3x + 4y = 12$ e $7x + 2y = 14$:

$$\begin{cases} 3x + 4y = 12 \\ 7x + 2y = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = {}^{16}/_{11} \\ y = {}^{21}/_{11} \end{cases}$$

Logo, as coordenadas do ponto C são $C\left(\frac{16}{11}, \frac{21}{11}\right)$.

Sabemos que a solução óptima ocorre em pelo menos um dos vértices da região admissível. Para determinar em qual dos pontos a função objectivo toma o maior valor (neste caso, o problema é de maximização), basta substituir na função objectivo as coordenadas dos pontos extremos. Pode-se elaborar uma tabela:

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{y}$	$\boldsymbol{z = 4x + 3y}$
0	0	$z = 4 \times 0 + 3 \times 0 = 0$
0	3	$z = 4 \times 0 + 3 \times 3 = 9$
$\frac{16}{11}$	$\frac{21}{11}$	$z = 4 \times \frac{16}{11} + 3 \times \frac{21}{11} = \frac{127}{11}$
2	0	$z = 4 \times 2 + 3 \times 0 = 8$

Então, o lucro é máximo $\left(z = \frac{127}{11} \approx 11{,}55\right)$ para $x = \frac{16}{11} \approx 1{,}45$ e $y = \frac{21}{11} \approx 1{,}91$, ou seja, para que a empresa tenha um lucro global máximo de $11{,}55$€, terá que fabricar diariamente $145\ m^2$ de tecido «angorá» e $191\ m^2$ de tecido «angorá». Na interpretação da solução óptima, para além dos valores das variáveis de decisão e da função objectivo, pode-se tirar conclusões acerca das restrições. Neste caso, podemos saber quantas horas de cada máquina são utilizadas diariamente no fabrico dos tecidos e se esse valor atinge o limite de utilização disponível. Para obter esta informação, substitui-se em cada restrição os valores da solução óptima:

$$3 \times \frac{16}{11} + 4 \times \frac{21}{11} \leq 12 \Leftrightarrow \frac{132}{11} \leq 12 \Leftrightarrow 12 \leq 12$$

$$7 \times \frac{16}{11} + 2 \times \frac{21}{11} \leq 14 \Leftrightarrow \frac{154}{11} \leq 14 \Leftrightarrow 14 \leq 14$$

Tanto na primeira como na segunda restrição verifica-se que as 12 e 14 horas diárias disponíveis da máquina 1 e 2, respectivamente, são utilizadas totalmente.

Método gráfico: Análise geométrica da ligação entre a função objectivo e a região admissível.

A função objectivo é dada pela expressão $z = 4x + 3y$. Esta equação pode ser escrita de modo equivalente:

$$y = -\frac{4}{3}x + \frac{z}{3}$$

Esta equação define uma família de rectas paralelas, que se designam por *rectas de nível*, de declive igual a $-\frac{4}{3}$ e ordenada na origem igual a $\frac{z}{3}$. Determinar a solução óptima é determinar, com a ajuda de uma régua, a recta de nível que tem maior ordenada na origem e que intersecta a região admissível em pelo menos um ponto.

Começa-se por desenhar uma recta de nível atribuindo um valor a z, por exemplo, $z = 0$, obtém-se a recta de nível que passa na origem do referencial:

$$y = -\frac{4}{3}x$$

Deslocando-a paralelamente a si própria sobre a região admissível, de acordo com o sentido do crescimento da função objectivo, uma vez que o problema é de maximização, vamos encontrando soluções "melhores" até chegarmos à solução óptima:

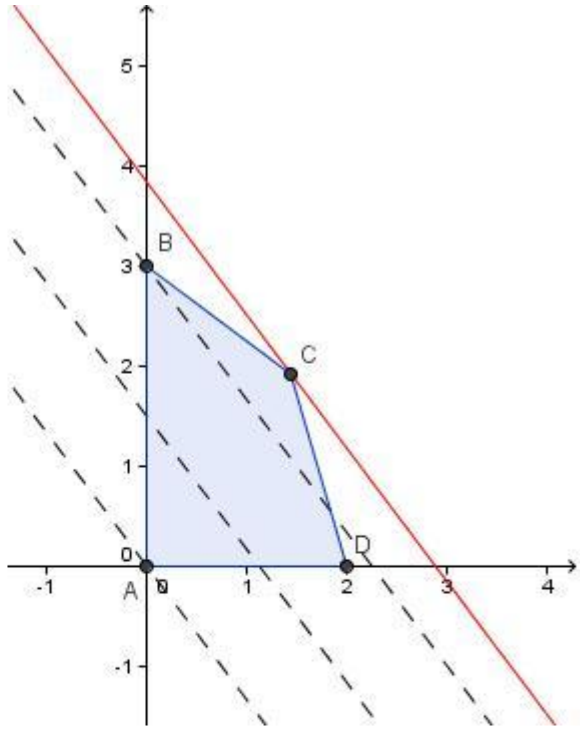


Fig. 4. Ilustração da região admissível e da família de rectas da função objectivo do problema.

Graficamente, concluímos que o ponto C corresponde a solução óptima. Como vimos anteriormente, para determinar as suas coordenadas, resolve-se o sistema de equações lineares constituído pelas rectas de equação $3x + 4y = 12$ e $7x + 2y = 14$. Logo, as coordenadas do ponto C são $C\left(\frac{16}{11}, \frac{21}{11}\right)$.

Conclui-se, que para obter um lucro máximo de $11{,}55$€, a empresa terá que fabricar diariamente $145\ m^2$ de tecido «angorá» e $191\ m^2$ de tecido «angorá».

3.4.2. Utilização do Computador

Na maior parte das vezes, os problemas de Programação Linear envolvem várias variáveis e restrições, neste caso, recorre-se ao uso de programas de computador. Existem vários programas gratuitos e de fácil utilização pelos alunos, que possibilitam a exploração de uma maior diversidade de problemas, permitindo que se centrem mais na análise e interpretação de resultados. Por exemplo:

- Módulo *Solver* do *Microsoft Excel*
- *WinQSB*[7]
- *Winplot*[8]
- *Programación Lineal*[9]
- *LP Solver*[10]

Vamos apresentar a resolução do problema de Programação Linear, utilizando o *Solver* do *Microsoft Excel* e o *WinQSB*.

Resolução do problema utilizando o Solver do Microsoft Excel

A folha de cálculo permite resolver problemas de Programação Linear com várias variáveis e restrições, através da ferramenta *Solver*. Esta ferramenta encontra-se no separador *Dados* > *Análise*.

Fig. 5. Ferramenta *Solver* do *Microsoft Excel*.

---

[7] http://winqsb.en.softonic.com/

[8] http://www.baixaki.com.br/download/winplot.htm

[9] http://www.freedownloadmanager.org/es/downloads/programaci%C3%B3n_lineal_gratis/

[10] http://riot.ieor.berkeley.edu/riot/Applications/SimplexDemo/Simplex.html

Caso não esteja disponível, deve-se proceder à sua instalação da seguinte forma:

1º Passo) Em *Personalizar Barra de Ferramentas de Acesso Rápido* seleccionar a opção *Mais Comandos:*

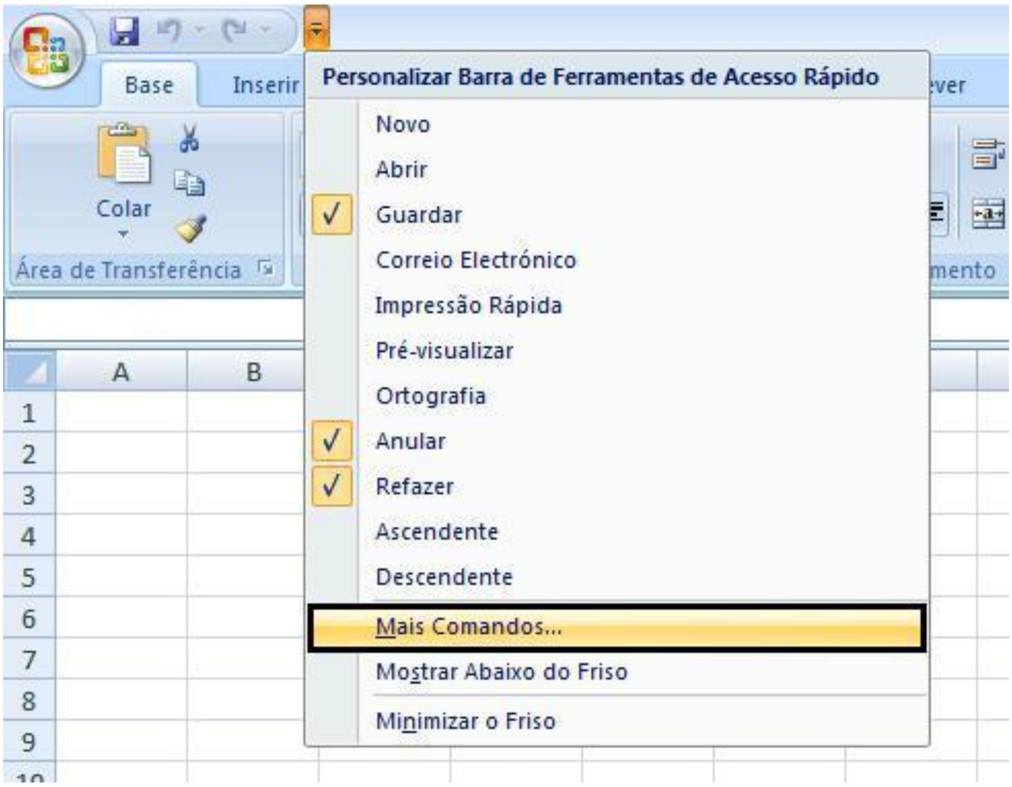


Fig. 6. Primeiro passo de instalação da ferramenta *Solver*.

2º Passo) Na janela *Opções do Excel* seleccionar a opção *Suplementos* > *Ir*:

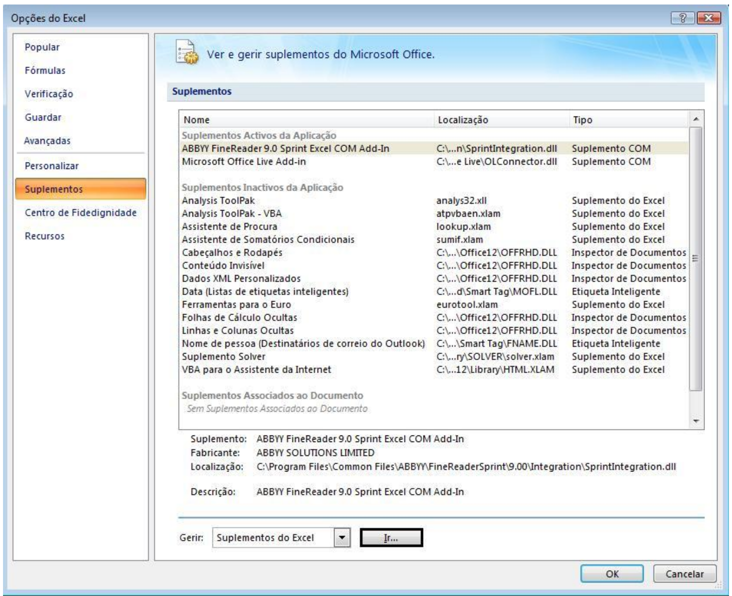


Fig. 7. Segundo passo de instalação da ferramenta *Solver*.

3º Passo) Seleccionar na janela *Suplementos*, a opção *Suplemento Solver* > *OK*:

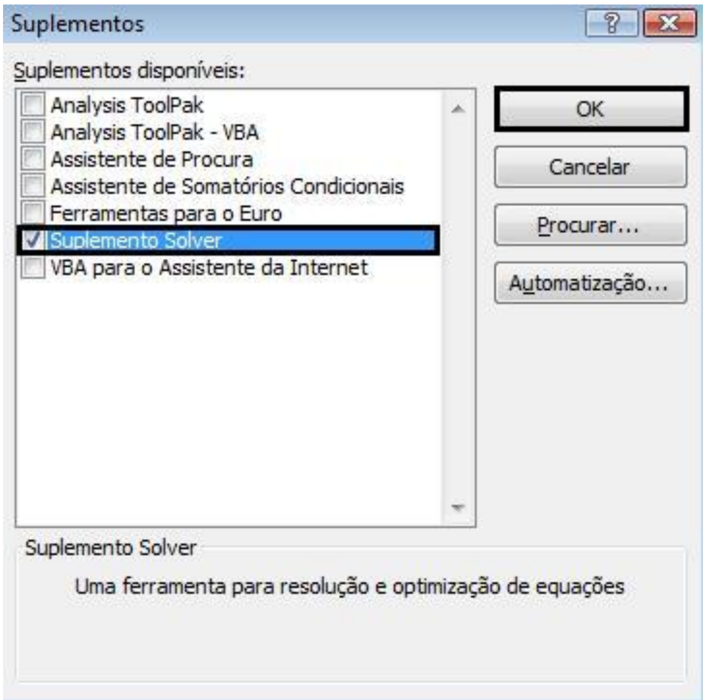


Fig. 8. Terceiro passo de instalação da ferramenta *Solver*.

Seguidamente, é apresentado a sequência de passos para a resolução do problema:

1º Passo) Introdução dos dados na folha de cálculo: constrói-se uma tabela de forma a organizar os dados.

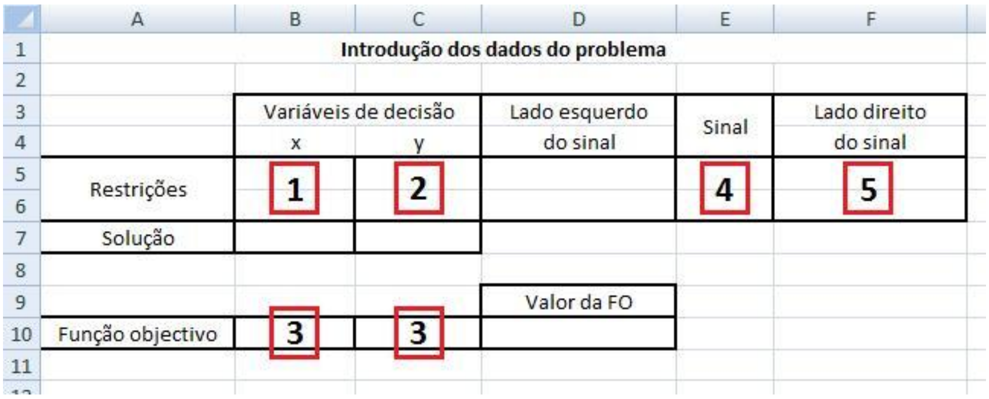


Fig. 9. Exemplo de uma tabela de introdução de dados do problema na folha de cálculo.

1 – Coeficientes das restrições da variável x

2 – Coeficientes das restrições da variável y

3 – Coeficientes das variáveis x e y da função objectivo

4 – Sinal das restrições

5 – Valor do lado direito das restrições

	A	B	C	D	E	F
1	Introdução dos dados do problema					
2						
3		Variáveis de decisão		Lado esquerdo	Sinal	Lado direito
4		x	y	do sinal		do sinal
5	Restrições	3	4		<=	12
6		7	2		<=	14
7	Solução					
8						
9				Valor da FO		
10	Função objectivo	4	3			

Fig. 10. Introdução dos dados do problema na folha de cálculo.

2º Passo) Introduz-se as seguintes fórmulas:

– Fórmula que relaciona os coeficientes da primeira restrição com as variáveis de decisão:

PRODUTO =B5*B7+C5*C7

	A	B	C	D	E	F
1	Introdução dos dados do problema					
2						
3		Variáveis de decisão		Lado esquerdo	Sinal	Lado direito
4		x	y	do sinal		do sinal
5	Restrições	3	4	=B5*B7+C5*C7	<=	12
6		7	2		<=	14
7	Solução					
8						
9				Valor da FO		
10	Função objectivo	4	3			

Fig. 11. Introdução da primeira restrição do problema na folha de cálculo.

– Fórmula que relaciona os coeficientes da segunda restrição com as variáveis de decisão:

PRODUTO =B6*B7+C6*C7

	A	B	C	D	E	F
1	Introdução dos dados do problema					
2						
3		Variáveis de decisão		Lado esquerdo	Sinal	Lado direito
4		x	y	do sinal		do sinal
5	Restrições	3	4	0	<=	12
6		7	2	=B6*B7+C6*C7	<=	14
7	Solução					
8						
9				Valor da FO		
10	Função objectivo	4	3			

Fig. 12. Introdução da segunda restrição do problema na folha de cálculo.

– Fórmula que relaciona os coeficientes da função objectivo com as variáveis de decisão:

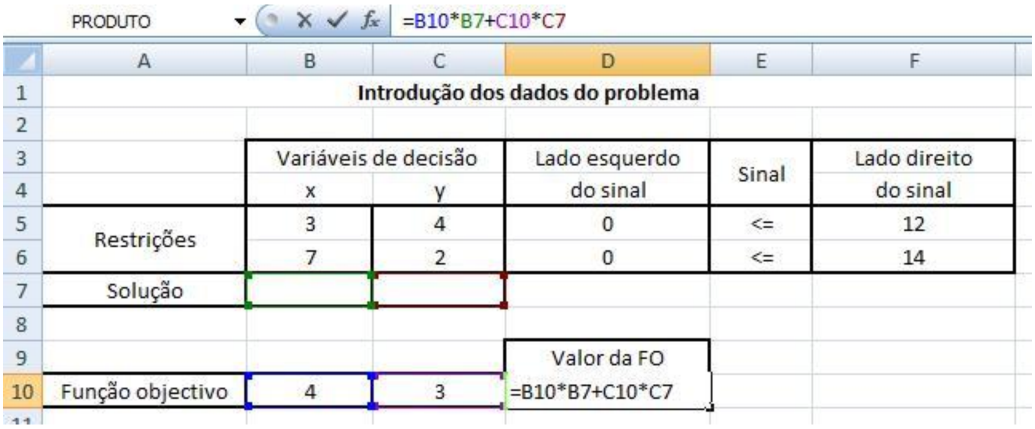


Fig. 13. Introdução da função objectivo do problema na folha de cálculo.

Por defeito, o Excel assume que as variáveis de decisão tomam o valor zero, uma vez que não foi definido qualquer valor para as células B7 e C7, que correspondem ao valor de x e y, respectivamente. Consequentemente o valor das células D5, D6 e D10 são zero que correspondem ao "lado esquerdo" da primeira e segunda restrição e ao valor da função objectivo, respectivamente.

3º Passo) Seleccionar separador *Dados* > *Análise* > *Solucionador*. Aparece a seguinte janela:

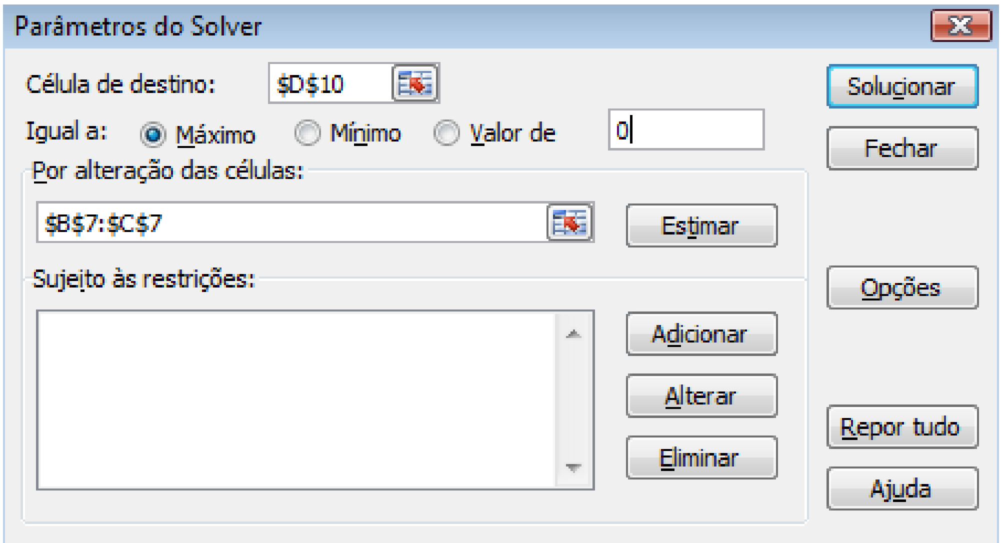


Fig. 14. Janela dos "Parâmetros do *Solver*".

Introduzir os seguintes dados:

1 - **Célula destino**: indicar a localização da célula onde está definida a fórmula da função objectivo (neste caso: D10).

2 - O tipo de **optimização** (neste caso: máximo).

3 - **Por alteração das células**: indicar a localização das células onde se armazenam os valores das variáveis de decisão (neste caso: B7 e C7).

4 - **Sujeito às restrições**: introduzir as restrições.

Para cada restrição, seleccionar *Adicionar*:

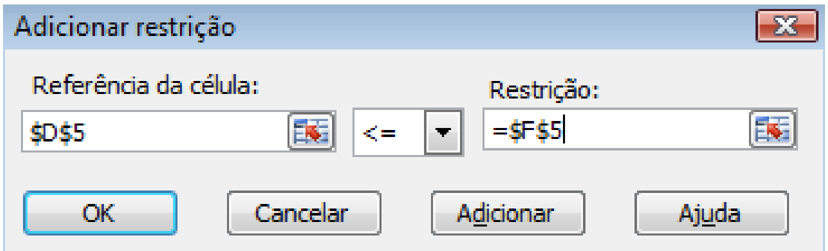


Fig. 15. Janela de introdução da primeira restrição.

Referência da célula: introduzir a localização da célula onde se encontra a fórmula relativa ao lado esquerdo da restrição (neste caso D5).

Operador: seleccionar o sinal da restrição em causa (neste caso ≤).

Valor: introduzir a localização da célula onde se encontra o valor do lado direito da restrição (neste F5).

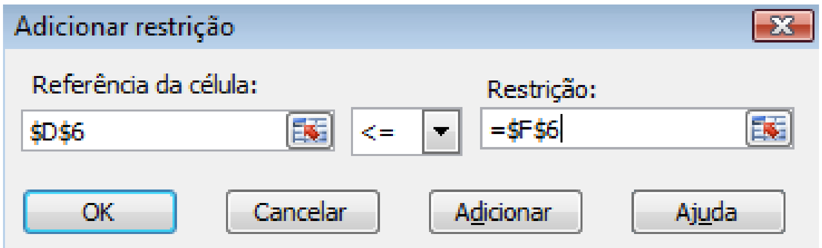


Fig. 16. Janela de introdução da segunda restrição.

Terminar a introdução de todas as restrições pressionando *OK*. Obtém-se a seguinte janela:

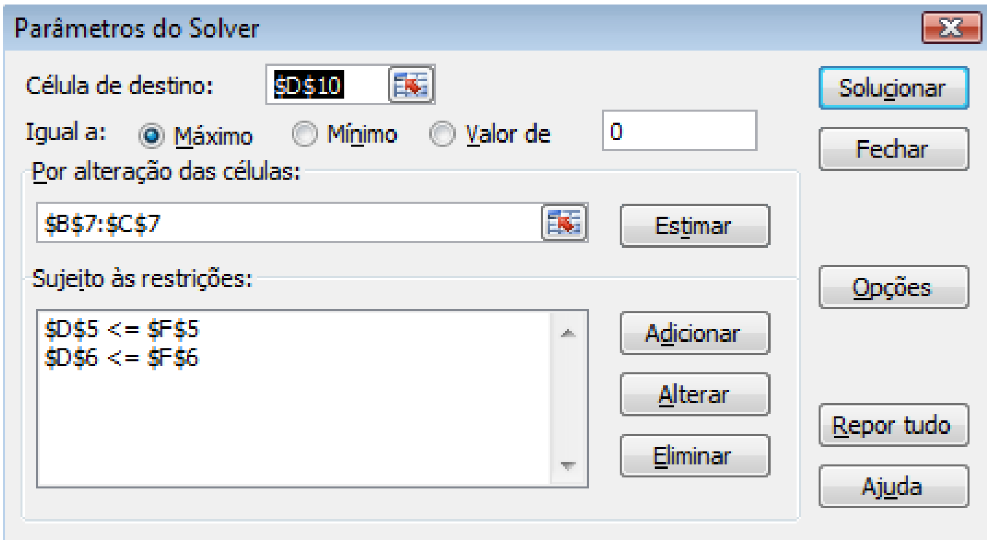


Fig. 17. Janela dos "Parâmetros do *Solver*" com a introdução do problema.

4º Passo) Seleccionar *Opções* e escolha "*Assumir modelo linear*" e "*Assumir não negativos*". Confirme pressionando *OK*.

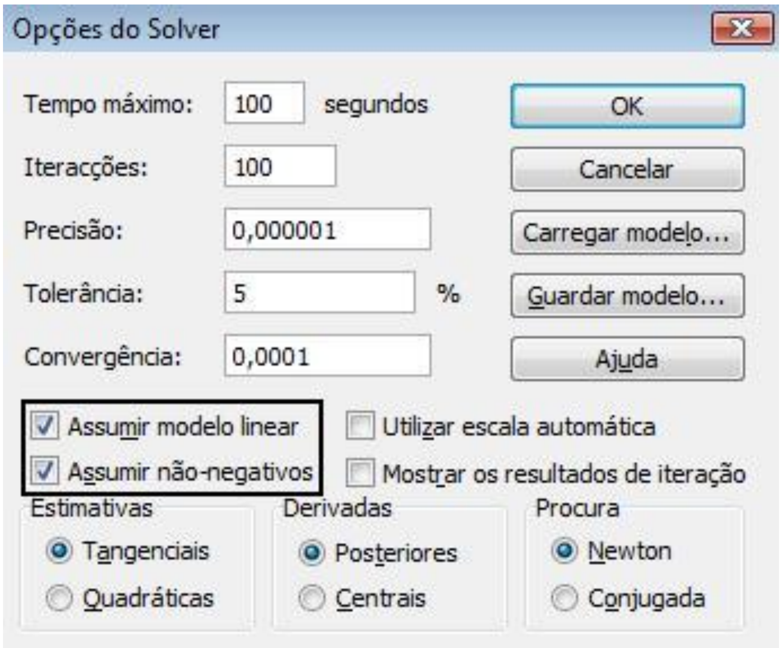


Fig. 18. Janela das "Opções do *Solver*".

5º Passo) Seleccionar o botão *Solucionar*. Caso os dados introduzidos não apresentem erros, aparecerá a seguinte caixa:

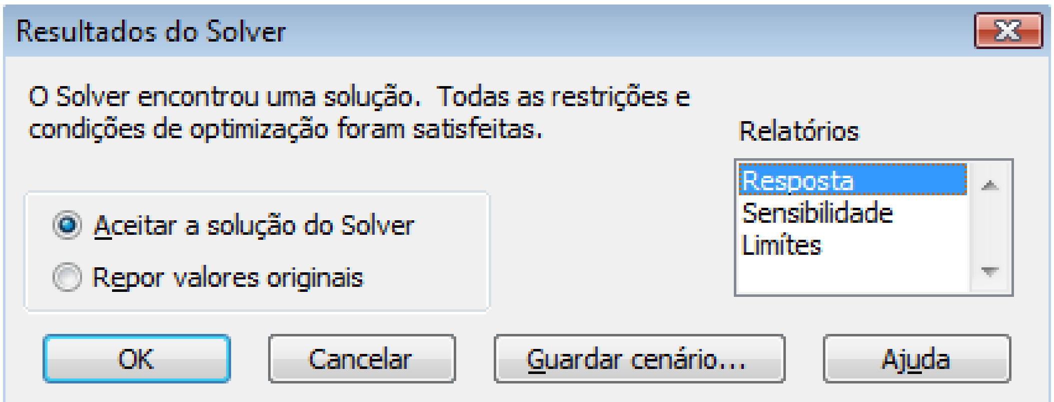


Fig. 19. Janela dos "Resultados do *Solver*".

É fundamental ler a mensagem que surge na janela, neste caso, o Solver encontrou uma solução óptima que verifica todas as restrições.

	A	B	C	D	E	F
1	**Introdução dos dados do problema**					
2						
3		Variáveis de decisão		Lado esquerdo	Sinal	Lado direito
4		x	y	do sinal		do sinal
5	Restrições	3	4	12	<=	12
6		7	2	14	<=	14
7	Solução	1,45454545	1,909090909			
8						
9				Valor da FO		
10	Função objectivo	4	3	11,54545455		

Fig. 20. Apresentação da solução óptima do problema encontrada pelo *Solver*.

Além da solução, o Solver gera três relatórios: "Resposta", "Sensibilidade" e "Limites". O relatório de respostas apresenta a solução óptima de forma detalhada:

Microsoft Excel 12.0 Relatório de respostas
Folha de cálculo: [Microsoft Excel.xlsx]Folha1
Relatório gerado: 07-11-2011 14:42:03

Célula de destino (Máx)

Célula	Nome	Valor original	Valor final
$D$10	Função objectivo Valor da FO	0	11,54545455

Células ajustáveis

Célula	Nome	Valor original	Valor final
$B$7	Solução x	0	1,454545455
$C$7	Solução y	0	1,909090909

Restrições

Célula	Nome	Valor da célula	Fórmula	Estado	Tolerância
$D$5	Restrições do sinal	12	$D$5<=$F$5	Arquivar	0
$D$6	do sinal	14	$D$6<=$F$6	Arquivar	0

Relatório de respostas 1 | Folha1 | Folha2 | Folha3

Fig. 21. Relatório de respostas gerado pelo *Solver*.

Da leitura do relatório concluímos que o valor óptimo da função objectivo é aproximadamente $11{,}55$ ver tabela *Célula de destino (Máx)*, ou seja, o lucro global máximo é de $11{,}55$€ euros por dia. A solução óptima (x, y) é aproximadamente $(1{,}45; 1{,}91)$ ver tabela *Células ajustáveis*, ou seja, a melhor combinação de produção a adoptar é o fabrico de $145m^2$ de tecido «angorá» e $191m^2$ de tecido «caxemira» por dia. Relativamente à tabela *Restrições* é apresentada a análise da informação sobre a distância a que a solução óptima se encontra do limite da restrição. Neste caso, o *Valor da célula* atinge o limite da restrição, o que resulta no valor zero para a *Tolerância*, ou seja, são utilizadas as 12 e 14 horas disponíveis para o uso das máquinas 1 e 2, respectivamente.

O relatório de sensibilidade fornece informações sobre a sensibilidade da solução relativamente a pequenas alterações:

Microsoft Excel 12.0 Relatório de sensibilidade
Folha de cálculo: [Microsoft Excel.xlsx]Folha1
Relatório gerado: 07-11-2011 15:10:27

Células ajustáveis

Célula	Nome	Final Valor	Reduzido Custo	Objectivo Coêficiente	Permissível Aumentar	Permissível Diminuir
$B$7	Solução x	1,454545455	0	4	6,5	1,75
$C$7	Solução y	1,909090909	0	3	2,333333333	1,857142857

Restrições

Célula	Nome	Final Valor	Sombra Preço	Restrição Lado direito	Permissível Aumentar	Permissível Diminuir
$D$5	Restrições do sinal	12	0,590909091	12	16	6
$D$6	do sinal	14	0,318181818	14	14	8

Fig. 22. Relatório de sensibilidade gerado pelo *Solver*.

O relatório de limites lista a célula de destino e as células ajustáveis com os respectivos valores, limites inferior e superior e valores alvo.

Microsoft Excel 12.0 Relatório de limites
Folha de cálculo: [Microsoft Excel.xlsx]Relatório de limites 1
Relatório gerado: 07-11-2011 15:12:09

	Objectivo	
Célula	Nome	Valor
$D$10	Função objectivo Valor da FO	11,54545455

	Ajustável		Inferior	Objectivo	Superior	Objectivo
Célula	Nome	Valor	Limite	Resultado	Limite	Resultado
$B$7	Solução x	1,454545455	0	5,727272727	1,454545455	11,54545455
$C$7	Solução y	1,909090909	0	5,818181818	1,909090909	11,54545455

Fig. 23. Relatório de limites gerado pelo *Solver*.

Resolução do problema utilizando o WinQSB

O *download* do *software WinQSB* pode ser feito pela internet gratuitamente.
Após instalar o *software WinQSB*, escolher a aplicação *Linear and Integer Programming*.

1º Passo) Seleccionar no menu *File* a opção *New Problem*. Surge a janela seguinte:

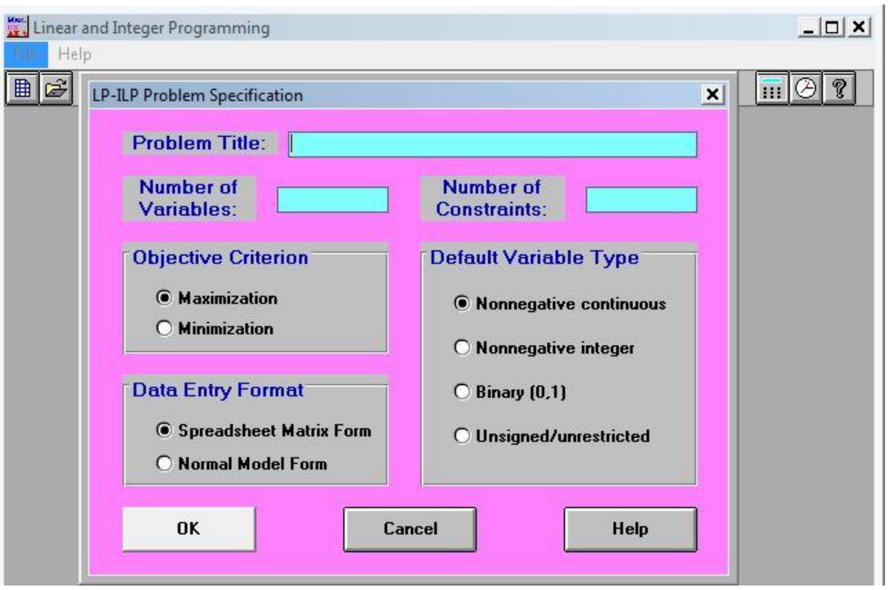
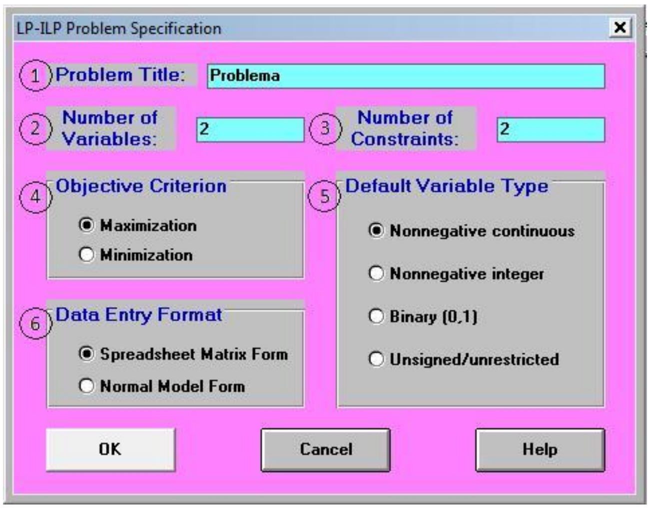


Fig. 24. Janela de "Especificações do Problema".

2º Passo) Introduzir os dados sobre o problema:



Legenda:

1 – Título do problema

2 – Número de variáveis

3 – Número de restrições

4 – Tipo de optimização

5 – Tipo de variáveis

6 – Formato de entrada dos dados

Fig. 25. Janela de introdução dos dados sobre o problema.

3º Passo) Ao escolher *Spreadsheet Matrix Form* como forma de entrada dos dados, introduz-se os dados do problema de forma matricial:

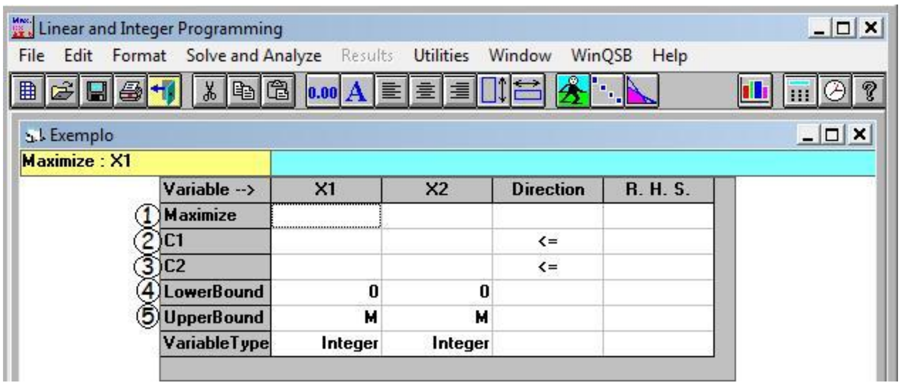


Fig. 26. Tabela de introdução dos coeficientes do problema.

Legenda:

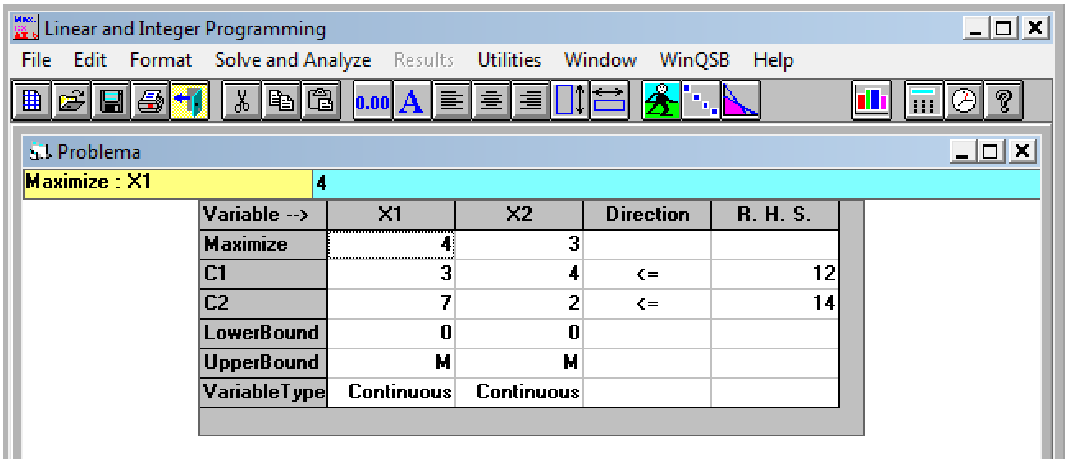
1 – Coeficientes da função objectivo

2 – Coeficientes da restrição

3 – Coeficientes da restrição

4 – Limite inferior das variáveis

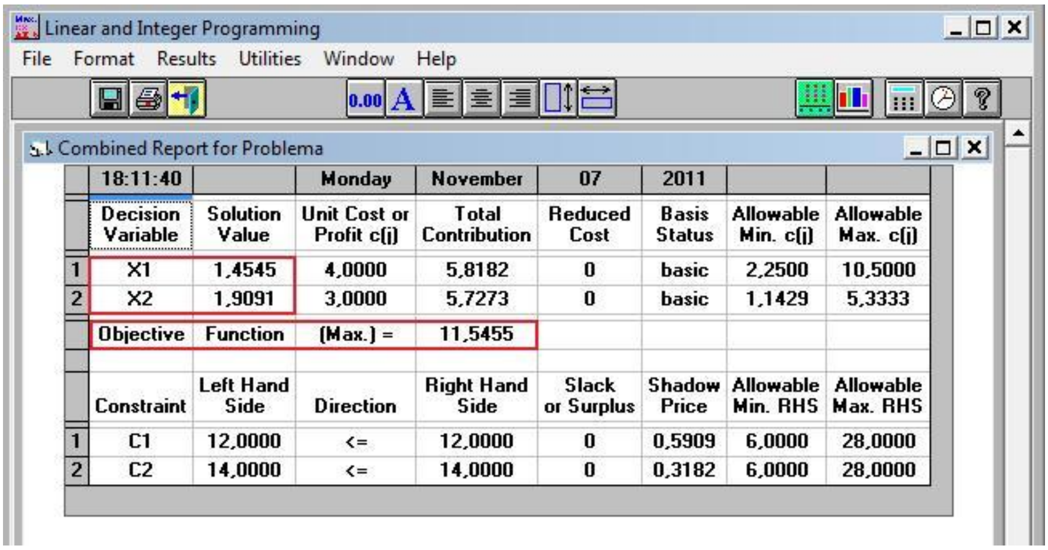
5 – Limite superior das variáveis



Variable -->	X1	X2	Direction	R. H. S.
Maximize	4	3		
C1	3	4	<=	12
C2	7	2	<=	14
LowerBound	0	0		
UpperBound	M	M		
VariableType	Continuous	Continuous		

Fig. 27. Ilustração da introdução dos coeficientes do problema.

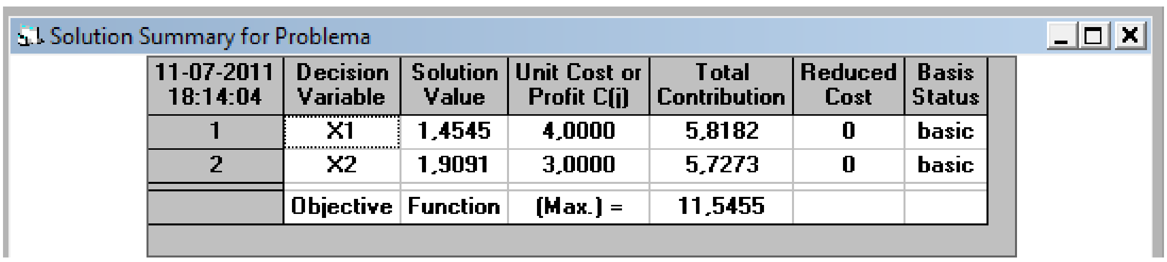
4º Passo) Para resolver o problema, seleccionar no menu *Solve and Analyze* a opção *Solve the Problem*. Obtém-se a solução óptima, o valor óptimo da função objectivo e outros dados do problema.



	18:11:40		Monday	November	07	2011		
	Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min. c(j)	Allowable Max. c(j)
1	X1	1,4545	4,0000	5,8182	0	basic	2,2500	10,5000
2	X2	1,9091	3,0000	5,7273	0	basic	1,1429	5,3333
	Objective	Function	(Max.) =	11,5455				
	Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS
1	C1	12,0000	<=	12,0000	0	0,5909	6,0000	28,0000
2	C2	14,0000	<=	14,0000	0	0,3182	6,0000	28,0000

Fig. 28. Apresentação da solução óptima do problema, limites e sensibilidade do modelo.

Nota: Se seleccionar a opção *Results* → *Solution Summary*, obtém um quadro resumo onde aparece apenas a solução óptima e o valor óptimo.



11-07-2011 18:14:04	Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit C(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status
1	X1	1,4545	4,0000	5,8182	0	basic
2	X2	1,9091	3,0000	5,7273	0	basic
	Objective	Function	(Max.) =	11,5455		

Fig. 29. Apresentação sintetizada da solução óptima do problema.

5º Passo) Para resolver o problema graficamente, seleccionar no menu *Solve and Analyze* a opção *Graphic Method*. Indicar a que variável associar cada eixo:

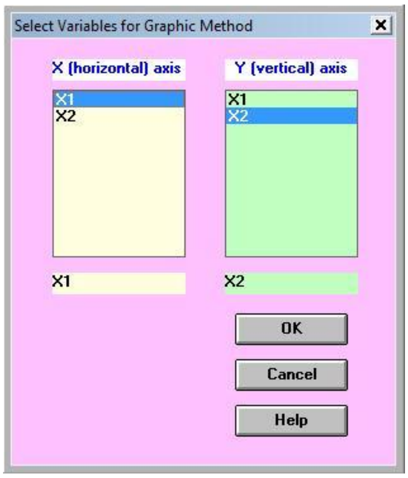


Fig. 30. Janela de selecção das variáveis a associar a cada eixo.

Obtém-se um sistema de eixos cartesianos onde estão representados a região admissível, a função objectivo, as restrições do problema, a solução óptima e o valor óptimo:

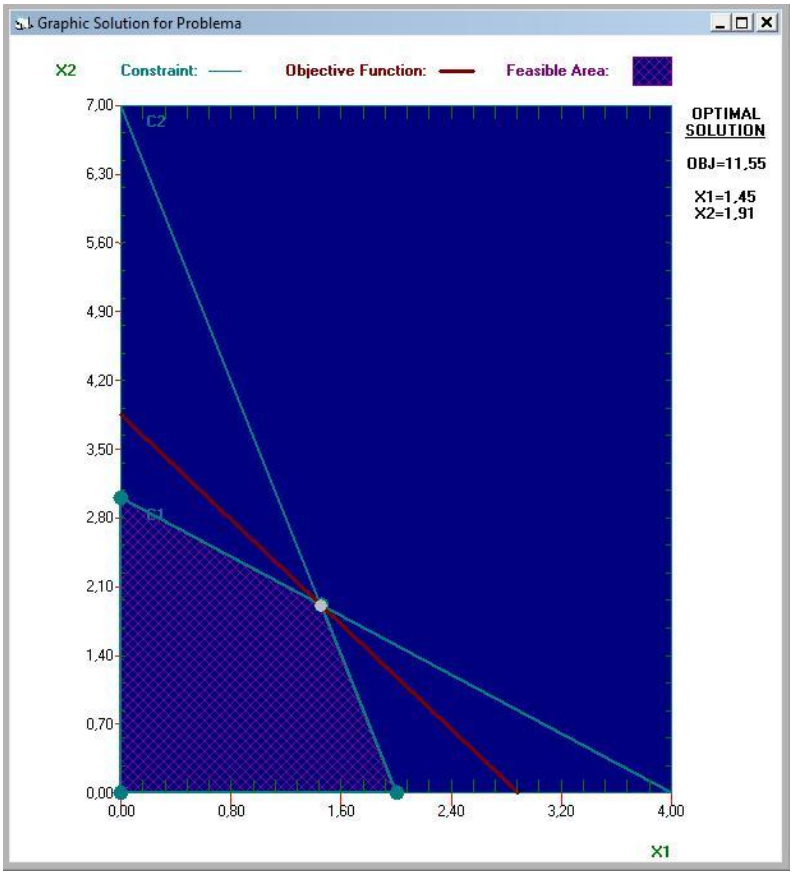


Fig. 31. Apresentação da resolução do problema pelo método gráfico, incluindo a região admissível, a solução óptima e o óptimo.

Identificação das principais vantagens e desvantagens dos Softwares apresentados

Relativamente à introdução dos dados do problema, o *WinQSB* permite com grande facilidade definir a função objectivo, as restrições e o tipo de problema, uma vez que o *software* é orientado especificamente para a resolução de problemas de Programação Linear. Enquanto no *Excel*, o utilizador terá que decidir a melhor forma de organizar os dados e definir fórmulas para resolver o problema. Quanto à dimensão, qualquer um dos *softwares* permite a resolução de problemas com várias variáveis, o que é uma mais valia, na medida em que permitem diferentes explorações do mesmo problema. Além disso, existe a opção de definir as variáveis como inteiras, caso se esteja a resolver um problema de Programação Linear, em que as variáveis de decisão apenas podem tomar valores inteiros.

No que diz respeito ao método de resolução, o *Excel* apenas apresenta o método analítico, enquanto o *WinQSB* permite a resolução pelos dois métodos, analítico e gráfico, caso se esteja a resolver um problema com duas variáveis de decisão. No entanto, apresenta apenas o resultado final do processo, não permitindo visualizar as várias etapas da resolução. Os dois *softwares* permitem obter outras conclusões, além do valor óptimo e da solução óptima, nomeadamente, a respeito das restrições e sensibilidade da solução.

Capítulo 4. Uma experiência em contexto de sala de aula

4.1. Aspectos metodológicos do estudo

Nas duas últimas décadas, assistiu-se a uma utilização crescente da abordagem de natureza qualitativa na investigação em Educação. Segundo Bogdan e Biklen (como citado em Tuckman, 2005, p.507), a investigação qualitativa tem cinco características: (1) a fonte directa dos dados é o ambiente natural e o investigador é o principal agente na recolha desses mesmos dados; (2) os dados que o investigador recolhe são essencialmente de carácter descritivo; (3) os investigadores que utilizam metodologias qualitativas, interessam-se mais pelo processo em si do que propriamente pelos resultados; (4) a análise dos dados é feita de forma indutiva; e (5) o investigador interessa-se, acima de tudo, por tentar compreender o significado que os participantes atribuem às suas experiências.

A investigação qualitativa tem o seu enfoque na compreensão dos problemas, analisando comportamentos, atitudes e valores, não sendo relevante a dimensão da amostra e a generalização de resultados.

Este estudo enquadra-se no contexto de uma investigação qualitativa, dado que foi realizado de forma indutiva, "os investigadores tendem a analisar a informação de uma forma indutiva. Desenvolvem conceitos e chegam à compreensão de fenómenos, a partir de padrões provenientes da recolha de dados. Não procuram a informação para verificar hipóteses" (Carmo & Ferreira, 1998, p. 179). Relativamente à natureza do estudo, este é descritivo pois "implica estudar, compreender e explicar a situação actual do objecto de investigação" (Carmo & Ferreira, 1998, p. 213).

Este estudo decorreu numa escola, da zona centro, onde se realizou a Prática de Ensino Supervisionada I e II, unidades curriculares do ciclo de estudos que visa a conferência de habilitação profissional para a docência no 3º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário da disciplina de Matemática.

A oferta educativa e formativa que a escola proporciona aos seus alunos é diferenciada em ensino diurno e ensino pós-laboral. Faz parte do ensino diurno o 3º ciclo do ensino básico, com a inclusão das disciplinas de movimento e expressão corporal (Dança) e de Artes Plásticas e o ensino secundário com os cursos científico-humanísticos (Ciências e Tecnologias, Ciências Socioeconómicas, Línguas e Humanidades) e os cursos profissionais (Electromecânica, Electrotecnia, Instalações Eléctricas, Gestão, Condutor de Obra e Secretariado). A formação pós-laboral de trabalhadores incide sobre os cursos de Operador de CAD, Técnico de Construção Civil, Técnico de Apoio à Gestão e Técnico de Instalações Eléctricas.

A escola oferece igualmente, uma vasta gama de actividades que são planeadas e organizadas pelos grupos disciplinares e projectos, dos quais fazem parte: Área de Projecto, AmbiEscola, Comenius "Água" e PESES.

Neste estudo pretendeu-se descrever e analisar o desempenho dos alunos na realização de uma tarefa a aplicar numa turma, onde o tema da Programação Linear não tivesse sido inteiramente abordado, mas integrada numa sequência didáctica. A escolha natural teria sido a turma do 11º ano onde realizei a Prática de Ensino Supervisionada, o que não foi possível pois o tema já tinha sido abordado no início do 2º período escolar, o qual coincidiu temporalmente com a interrupção lectiva do Mestrado. Consequentemente, foi escolhida uma turma do 12º ano do Ensino Profissional constituída por dezassete alunos, quinze do sexo masculino e dois do sexo feminino, que apresentava os requisitos necessários à realização deste estudo. Verificadas as condições pretendidas, diligenciou-se junto do professor da turma seleccionada, o qual disponibilizou uma aula de 90 minutos para a realização da tarefa.

4.2. Tarefa de Programação Linear

A tarefa seleccionada para a realização deste trabalho foi adaptada do manual escolar *Infinito 11 A*, tendo em conta os objectivos definidos anteriormente, a adequação ao nível cognitivo e que reproduzisse a realidade escolar, de forma a tornar-se apelativa para os alunos.

Tarefa: Para angariarem fundos para a Associação de Estudantes, os alunos conseguiram a oferta de 20 pares de chuteiras e 60 camisolas e decidiram, com elas, fazer dois tipos de lotes:

Tipo A: um par de chuteiras e uma camisola.

Tipo B: um par de chuteiras e cinco camisolas.

Venderiam, depois, os lotes do tipo A a 40€ e os do tipo B a 60€.

1. Qual será o lucro que obtêm se fizerem 3 lotes do tipo A e 4 lotes do tipo B?

2. E se fizessem 10 lotes do tipo A e 5 do tipo B?

3. Designemos por x o número de lotes do tipo A e por y o número de lotes do tipo B. Tendo em conta os dados, complete a tabela seguinte:

	Tipo A	**Tipo B**	**Total**
Nº de lotes	x	y	
Nº de pares de chuteiras			
Nº de camisolas			
Lucro			

4. Na sua opinião, qual deverá ser o número de lotes do tipo A e o números de lotes do tipo B a constituir para que o lucro obtido nas vendas seja máximo?

5. E se o preço dos lotes fosse igual? Considere que o valor de venda dos lotes do tipo A e do tipo B é de 40€ cada um. Determine a solução óptima do problema.

6. Após os alunos decidirem qual seria a melhor decisão a tomar, receberam de uma loja a oferta de 70 bolas de futebol.

Optaram por incluí-las nos dois tipos de lotes, aumentando o seu valor de venda:

Tipo A: um par de chuteiras, uma camisola e três bolas

Tipo B: um par de chuteiras, cinco camisolas e cinco bolas

Um lote do tipo A custaria 60€ e um lote do tipo B custaria 100€.

Determina o número de lotes do tipo A e o número de lotes do tipo B que os alunos devem constituir para que o lucro de vendas seja máximo.

No quadro seguinte encontram-se definidos os conhecimentos prévios, os objectivos de aprendizagem e o âmbito dos conteúdos subjacentes à realização da tarefa:

<table>
<tr><td><u>Conhecimentos prévios</u></td><td>✓ Representar graficamente rectas no plano;
✓ Representar graficamente equações e inequações lineares a duas incógnitas;
✓ Resolver graficamente sistemas de equações e inequações lineares a duas incógnitas;
✓ Identificar as inequações que determinam regiões no plano.</td></tr>
<tr><td><u>Objectivos de Aprendizagem</u></td><td>– Interpretar e equacionar problemas
– Representar rectas em referenciais cartesianos do plano
– Identificar regiões do plano limitadas por rectas
– Identificar a posição relativa de rectas e determinar pontos de intersecção de rectas
– Identificar geometricamente pontos do plano como solução óptima dum problema
– Verificar analiticamente que determinados pontos são solução óptima dum problema
– Escolher, analisar e validar a solução de um problema.</td></tr>
<tr><td><u>Âmbito dos Conteúdos</u></td><td>▪ Resolução de problemas envolvendo:
    – Sistemas de eixos coordenados;
    – Equações de rectas e funções afins;
    – Resolução de sistemas de equações e/ou inequações.
▪ Resolução de problemas de Programação Linear, com referências expressas à identificação:
    – das variáveis de decisão;
    – das restrições e;
    – da função objectivo,
bem como a sua formulação matemática.</td></tr>
</table>

Proposta de resolução da tarefa

1. O lucro que obtêm se fizerem 3 lotes do tipo A e 4 lotes do tipo B é:

$$3 \times 40€ + 4 \times 60€ = 360€.$$

2. O lucro que obtêm se fizerem 10 lotes do tipo A e 5 lotes do tipo B é:

$$10 \times 40€ + 5 \times 60€ = 700€.$$

3.

	Tipo A	**Tipo B**	**Total**
Nº de lotes	$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{y}$	$x + y$
Nº de pares de chuteiras	x	y	$x + y$
Nº de camisolas	x	$5y$	$x + 5y$
Lucro	$40x$	$60y$	$40x + 60y$

4. Formulação matemática do problema:

x - *número de lotes do tipo A*

y - *número de lotes do tipo B*

$$max\ z = 40x + 60y$$

$$s.a.\quad \begin{array}{l} x + y \leq 20 \\ x + 5y \leq 60 \\ x, y \geq 0 \end{array}$$

Representação gráfica da região admissível:

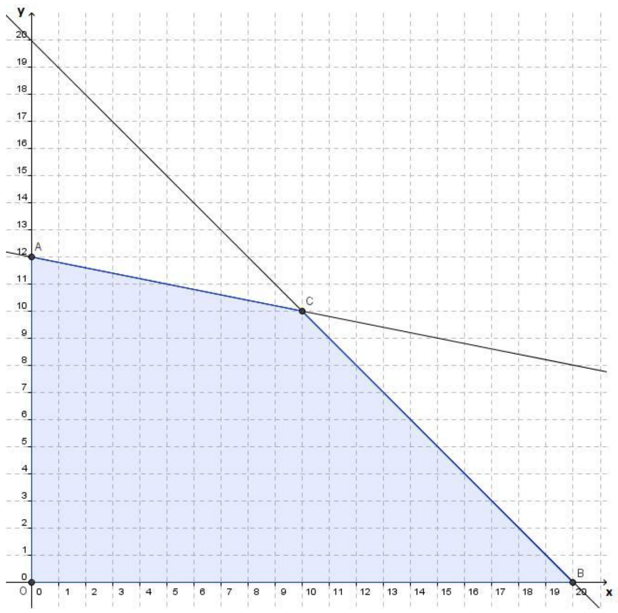


Fig. 32. Representação gráfica da região admissível do problema da questão 4.

Determinação da solução óptima:

1º Processo) Método Analítico

Os vértices da região admissível são os pontos A, B, C e O. O ponto O tem coordenadas $O(0,0)$ uma vez que corresponde à origem do referencial. O ponto A corresponde à intersecção da recta $x+5y=60$ e o eixo das ordenadas, logo as coordenadas de A são $A(0,12)$. O ponto B corresponde à intersecção da recta $x+y=20$ e o eixo das abcissas, logo as coordenadas de B são $B(20,0)$. O ponto C é o ponto de intersecção das rectas de equação $x+5y=60$ e $x+y=20$. Considera-se o seguinte sistema de equações lineares com duas incógnitas:

$$\begin{cases} x+y=20 \\ x+5y=60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=20-x \\ y=12-\frac{1}{5}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \\ 20-x=12-\frac{1}{5}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \\ x-\frac{1}{5}x=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \\ 4x=40 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=10 \\ x=10 \end{cases}$$

O ponto C tem coordenadas $C(10,10)$.

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{y}$	$\boldsymbol{z=40x+60y}$
0	0	$z=40\times0+60\times0=0$
0	12	$z=40\times0+60\times12=720$
20	0	$z=40\times20+60\times0=800$
10	10	$z=40\times10+60\times10=1000$

Dado que a solução óptima corresponde ao ponto admissível $C(10,10)$ de coordenadas inteiras, então os alunos devem constituir 10 lotes do tipo A e 10 lotes do tipo B, obtendo, assim, um lucro de 1000€.

2º Processo) Método Gráfico

A expressão da função objectivo (Lucro) $z=40x+60y$ pode escrever-se,

$$y=-\frac{40}{60}x+\frac{z}{60} \Leftrightarrow y=-\frac{2}{3}x+\frac{z}{60}$$

Estamos perante uma família de rectas paralelas, de declive igual a $-\frac{2}{3}$ e ordenada na origem $\frac{z}{60}$.

Comecemos por representar uma das rectas da família, por exemplo, $y = -\frac{2}{3}x + 6$, considerando $z = 360$ (mas poderia ser $z = 0$ ou z igual a outro qualquer valor). Deslocando esta recta paralelamente a si própria sobre a região admissível, de acordo com o sentido de crescimento de z, ou seja, da esquerda para a direita, vamos encontrando soluções melhores.

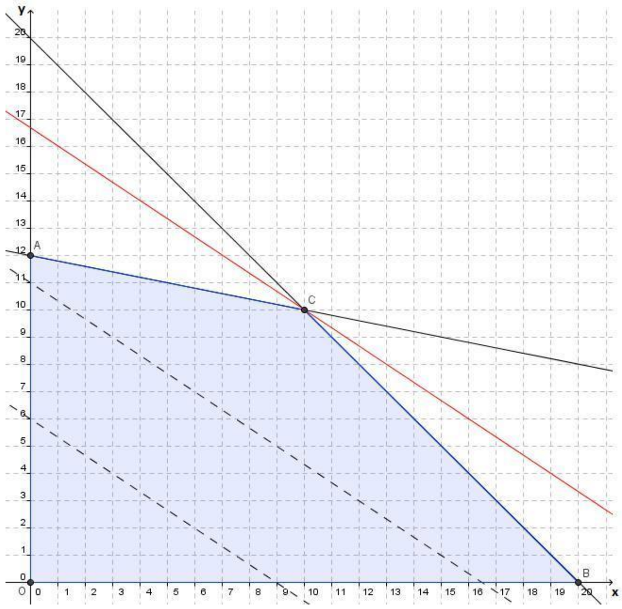


Fig. 33. Representação gráfica da região admissível e da família de rectas da função objectivo do problema da questão 4.

Graficamente, temos que o ponto C corresponde à solução óptima. Para determinar as coordenadas resolve-se o sistema de equações lineares constituído pelas rectas de equações $x + y = 20$ e $x + 5y = 60$.

$$\begin{cases} x + y = 20 \\ x + 5y = 60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 20 - x \\ y = 12 - \frac{1}{5}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \\ 20 - x = 12 - \frac{1}{5}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \\ x - \frac{1}{5}x = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \\ 4x = 40 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 10 \\ x = 10 \end{cases}$$

Substituindo, na função objectivo, a solução óptima vem:

$$z = 40 \times 10 + 60 \times 10 = 1000.$$

Concluindo-se que os alunos devem constituir 10 lotes do tipo A e 10 lotes do tipo B, obtendo-se, assim, um lucro de 1000€.

5.

Neste caso, as restrições mantêm-se, mudando apenas a função objectivo que passa a ser definida por:

$$z = 40x + 40y.$$

De forma análoga à descrita na alínea anterior, pode-se optar por um dos processos para determinar a solução óptima:

1º Processo) Método Analítico

x	y	$z = 40x + 40y$
0	0	$z = 40 \times 0 + 40 \times 0 = 0$
0	12	$z = 40 \times 0 + 40 \times 12 = 480$
20	0	$z = 40 \times 20 + 40 \times 0 = 800$
10	10	$z = 40 \times 10 + 40 \times 10 = 800$

Por este método, encontram-se duas soluções óptimas que correspondem aos vértices $B(20, 0)$ e $C(10, 10)$. Dado que se obteve duas soluções óptimas, é necessário recorrer ao método gráfico para determinar se existem outras soluções óptimas para o problema.

2º Processo) Método Gráfico

A expressão da função objectivo (Lucro) $z = 40x + 40y$ pode escrever-se,

$$y = -\frac{40}{40}x + \frac{z}{40} \Leftrightarrow y = -x + \frac{z}{40}$$

Estamos perante uma família de rectas paralelas, de declive igual a -1 e ordenada na origem $\frac{z}{40}$.

Tracemos, uma das rectas desta família, por exemplo, $y = -x$, com $z = 0$. Deslocando esta recta paralelamente a si própria sobre a região admissível, de acordo com o sentido de crescimento de z, ou seja, da esquerda para a direita, podemos constatar que a recta $y = -x + 20$ é a que tem a maior ordenada na origem. Neste caso, a sua intersecção com a região admissível é o segmento de recta $[CB]$. Logo, todos os pontos do segmento de recta de coordenadas inteiras são soluções óptimas.

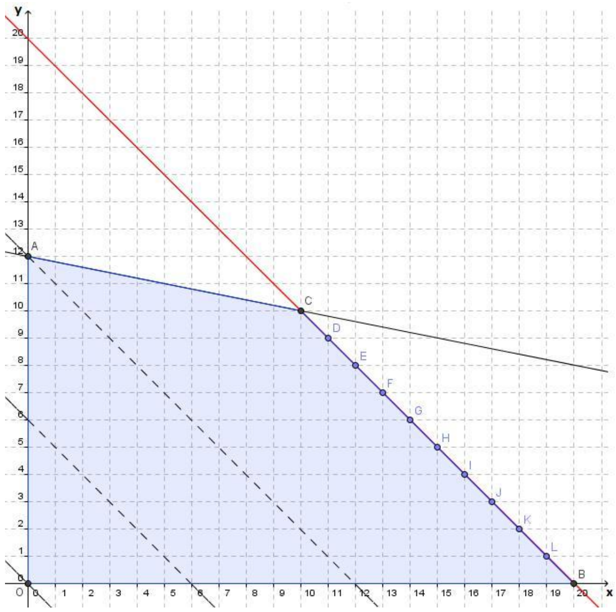


Fig. 34. Representação gráfica da família de rectas da função objectivo e identificação das soluções óptimas do problema da questão 5.

Os pontos admissíveis que correspondem ao lucro máximo são $(10,10), (11,9), (12,8), (13,7), (14,6), (15,5), (16,4), (17,3), (18,2), (19,1), (20,0)$. Para qualquer um destes pontos obtém-se um lucro de 800€. Ou seja, neste caso, os alunos podem constituir 10 lotes do tipo A e 10 lotes do tipo B ou 11 lotes do tipo A e 9 lotes do tipo B, …, ou 20 lotes do tipo A e nenhum lote do tipo B.

6.

Nesta questão, há alteração na função objectivo e a inclusão de uma nova restrição.

	Tipo A	**Tipo B**	**Total**
Nº de lotes	x	y	$x + y$
Nº de pares de chuteiras	x	y	$x + y$
Nº de camisolas	x	$5y$	$x + 5y$
Nº de bolas	$3x$	$5y$	$3x + 5y$
Lucro	$60x$	$100y$	$60x + 100y$

Formulação matemática do problema:

x *- número de lotes do tipo A*

y *- número de lotes do tipo B*

$$
\begin{aligned}
&max\ z = 60x + 100y \\
&s.a. \\
&\qquad x + y \leq 20 \\
&\qquad x + 5y \leq 60 \\
&\qquad 3x + 5y \leq 70 \\
&\qquad x, y \geq 0
\end{aligned}
$$

Representação gráfica da região admissível:

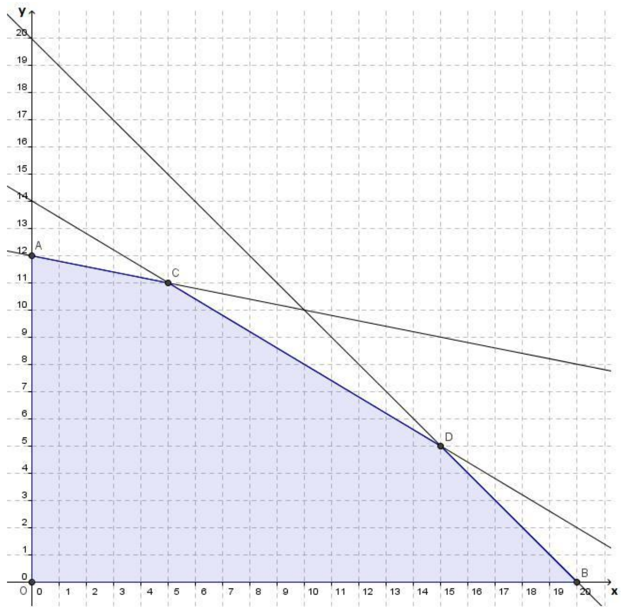


Fig. 35. Representação gráfica da região admissível do problema da questão 6.

Determinação da solução óptima:

1º Processo) Método Analítico

Os vértices da região admissível são os pontos A, B, C, D e O. Os pontos A, B e O têm coordenadas $A(0, 12)$, $B(20, 0)$ e $O(0,0)$. O ponto C é o ponto de intersecção das rectas de equação $x + 5y = 60$ e $3x + 5y = 70$. Considera-se o seguinte sistema de equações lineares com duas incógnitas:

$$
\begin{cases} x + 5y = 60 \\ 3x + 5y = 70 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 12 - \frac{1}{5}x \\ y = 14 - \frac{3}{5}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \\ 12 - \frac{1}{5}x = 14 - \frac{3}{5}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \\ \frac{2}{5}x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \\ x = 5 \end{cases}
$$

$$
\Leftrightarrow \begin{cases} y = 11 \\ x = 5 \end{cases}
$$

O ponto C tem coordenadas $C(5, 11)$. O ponto D é o ponto de intersecção das rectas de equação $x + y = 20$ e $3x + 5y = 70$. Considera-se o seguinte sistema de equações lineares com duas incógnitas:

$$\begin{cases} x + y = 20 \\ 3x + 5y = 70 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 20 - x \\ y = 14 - \frac{3}{5}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \\ 20 - x = 14 - \frac{3}{5}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \\ 5x - 3x = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \\ x = 15 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 \\ x = 15 \end{cases}$$

O ponto D tem coordenadas $D(15, 5)$.

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{y}$	$\boldsymbol{z = 60x + 100y}$
0	0	$z = 60 \times 0 + 100 \times 0 = 0$
0	12	$z = 60 \times 0 + 100 \times 12 = 1200$
20	0	$z = 60 \times 20 + 100 \times 0 = 1200$
5	11	$z = 60 \times 5 + 100 \times 11 = 1400$
15	5	$z = 60 \times 15 + 100 \times 5 = 1400$

Por este método, encontram-se duas soluções óptimas que correspondem aos vértices $C(5, 11)$ e $D(15, 5)$. Dado que se obteve duas soluções óptimas é necessário recorrer ao método gráfico para determinar se existem outras soluções óptimas para o problema.

2º Processo) Método Gráfico

A expressão da função objectivo (Lucro) $z = 60x + 100y$ pode escrever-se,

$$y = -\frac{60}{100}x + \frac{z}{100} \Leftrightarrow y = -\frac{3}{5}x + \frac{z}{100}$$

Estamos perante uma família de rectas paralelas, de declive igual a $-\frac{3}{5}$ e ordenada na origem $\frac{L}{100}$. Tracemos, uma das rectas desta família, por exemplo, $y = -\frac{3}{5}x$, com $z = 0$.

Deslocando esta recta paralelamente a si própria sobre a região admissível, de acordo com o sentido de crescimento de z, ou seja, da esquerda para a direita, podemos constatar que a recta $y = -\frac{3}{5}x$ +14 é a que tem a maior ordenada na origem. Neste caso, a sua intersecção com a região admissível é o segmento de recta $[CD]$. Logo, todos os pontos do segmento de recta de coordenadas inteiras são soluções óptimas.

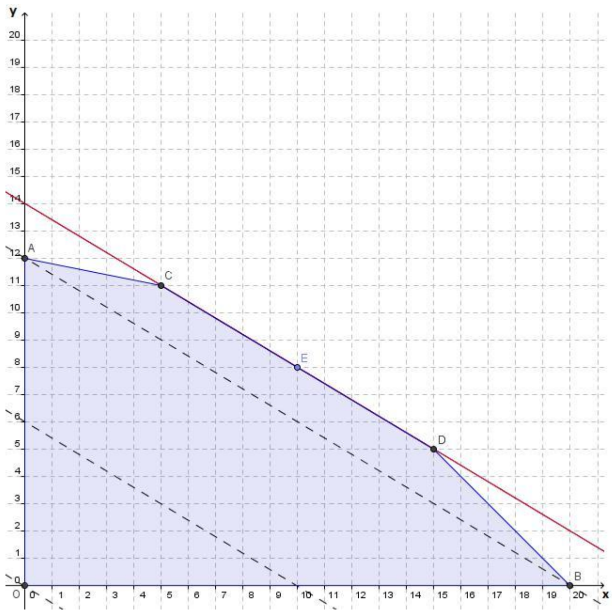


Fig. 36. Representação gráfica da família de rectas da função objectivo e identificação das soluções óptimas do problema da questão 6.

Os pontos admissíveis que correspondem ao lucro máximo são $(5, 11), (10, 8), (15, 5)$. Para qualquer um destes pontos obtém-se um lucro de 1400€. Ou seja, neste caso, os alunos podem constituir 5 lotes do tipo A e 11 lotes do tipo B ou 10 lotes do tipo A e 8 lotes do tipo B ou 15 lotes do tipo A e 5 lotes do tipo B.

4.3. Análise e interpretação dos dados recolhidos

Neste ponto apresenta-se a análise e interpretação dos dados recolhidos na realização da tarefa. De salientar, que o professor de matemática da turma, no bloco de quarenta e cinco minutos que antecedeu à aplicação da tarefa, abordou o conteúdo Programação Linear, expondo um problema de maximização, onde introduziu o método analítico e a utilização da calculadora gráfica na resolução deste tipo de problemas. Foi atribuído aos alunos, para a realização da tarefa, um período de tempo de setenta e cinco minutos. O primeiro aluno concluiu a tarefa em setenta minutos.

Pretendeu-se, com as questões 1 e 2, testar se os alunos compreenderam o enunciado do problema e se conseguiam expressar matematicamente o que era pedido. No gráfico 1 são apresentados os resultados relativos ao desempenho dos alunos nas referidas questões.

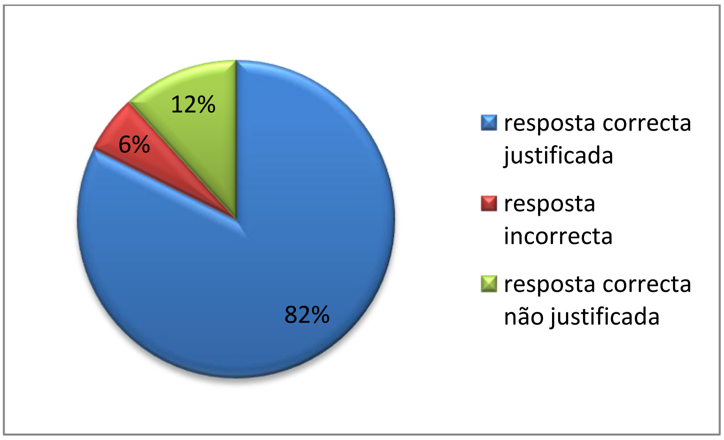


Gráfico 1. Frequências relativas (%) do desempenho dos alunos nas questões 1 e 2.

Da análise do gráfico 1, podemos verificar que praticamente todos os alunos responderam correctamente às questões colocadas. Observou-se que o aluno X7, iniciou a resolução da questão 1, tentando formular o modelo de Programação Linear considerando os coeficientes das restrições, o número de lotes dados no enunciado dessa questão, de forma inadequada; o aluno não prestou atenção ao que era pedido e aplicou a resolução do problema estudado na aula anterior.

Relativamente à questão 3, os alunos teriam que traduzir algebricamente os dados do enunciado, sobre a constituição e o lucro obtido pela venda dos lotes do tipo A e B, preenchendo a tabela. Seguidamente, no gráfico 2, são apresentados os resultados do desempenho dos alunos na resolução desta questão.

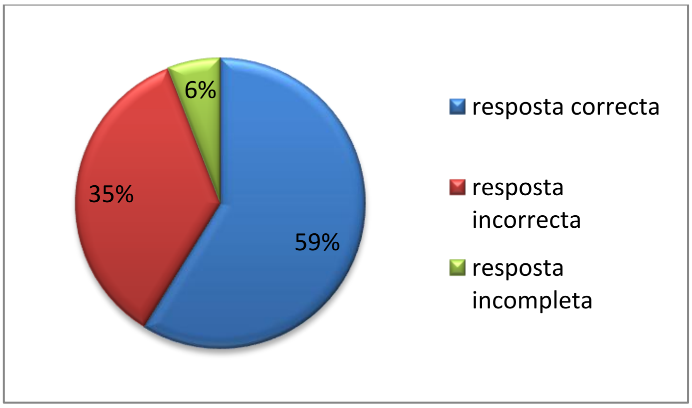


Gráfico 2. Frequências relativas (%) do desempenho dos alunos na questão 3.

Da análise do gráfico 2, podemos verificar que quase metade da turma não conseguiu responder correctamente ao que era pedido, apesar de na aula anterior terem abordado um problema análogo. Seguidamente, apresentam-se algumas das resoluções feitas pelos alunos.

O aluno X6 não identifica correctamente os coeficientes relativos ao lucro.

	Tipo A	Tipo B	Total
Nº de lotes	x	y	
Nº de pares de chuteiras	$1x$	$1y$	$1x + 1y$
Nº de camisolas	$1x$	$5y$	$1x + 5y$
Lucro	~~[illegible]~~ $2x$	~~[illegible]~~ $6y$	$2x + 6y$

Fig. 37. Resposta do aluno X6 à questão 3.

O aluno X7 não traduz algebricamente o lucro da venda de x lotes do tipo A e y lotes do tipo B e o lucro total, de forma correcta, uma vez que completa a linha relativa ao lucro, considerando apenas a venda de um lote de cada tipo A e B.

	Tipo A	Tipo B	Total
Nº de lotes	x	y	
Nº de pares de chuteiras	x	y	$x + y$ ~~3x+4y € 40~~
Nº de camisolas	x	$5y$	$x + 5y$ ~~3x+10y € 60~~
Lucro	40€	60€	~~[illegible]~~ ~~100€~~ 100€

Fig. 38. Resposta do aluno X7 à questão 3.

O aluno X9 completa a tabela apenas com os dados do enunciado do problema, ou seja, considerando um lote de cada tipo, A e B, não tendo em conta que o número de lotes de cada tipo são dados por x e y. Apenas na expressão que representa o lucro total é que considera as variáveis.

	Tipo A	Tipo B	Total
Nº de lotes	x	y	
Nº de pares de chuteiras	1	1	20 pares
Nº de camisolas	1	5	60 camisolas
Lucro	40 €	60 €	~~[illegible]~~ 40x + 60y

Fig. 39. Resposta do aluno X9 à questão 3.

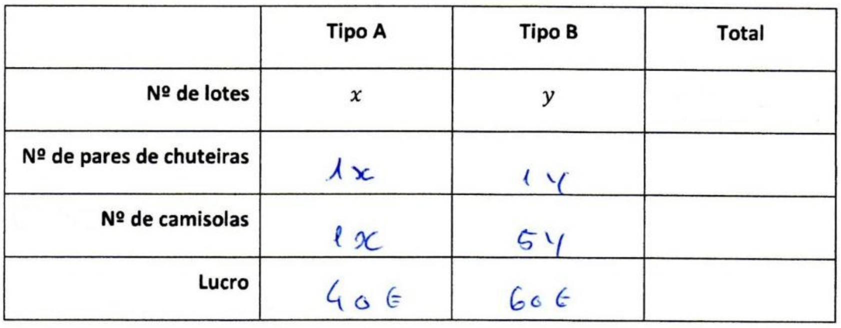
O aluno X14 expressa o lucro total através de uma inequação, impondo que o lucro total não seja superior a $100€$, escrevendo "$40x + 60y \leq 100$".

O aluno X15 não traduz algebricamente o lucro total e expressa, através de equações, que o número total de pares de chuteiras de x lotes do tipo A e de y lotes do tipo B é igual a 20, e o número total de camisolas de x lotes do tipo A e de y lotes do tipo B é igual a 60.

	Tipo A	Tipo B	Total
Nº de lotes	x	y	
Nº de pares de chuteiras	x	y	x + y = 20
Nº de camisolas	x	5y	x + 5y = 60
Lucro	40x	60y	

Fig. 40. Resposta do aluno X15 à questão 3.

O aluno X17 não expressa os totais relativos ao número de pares de chuteiras, de camisolas e lucro da venda de x lotes do tipo A e y lotes do tipo B. Além disso, completa a linha relativa ao lucro, considerando apenas a venda de um lote de cada tipo A e B.



	Tipo A	Tipo B	Total
Nº de lotes	x	y	
Nº de pares de chuteiras	1x	1y	
Nº de camisolas	1x	5y	
Lucro	40 €	60 €	

Fig. 41. Resposta do aluno X17 à questão 3.

O aluno X10 não concluiu o preenchimento da tabela, os restantes alunos resolveram a questão correctamente.

Na resolução da questão 4, pretendia-se saber se os alunos eram capazes de formular matematicamente o problema, representar graficamente a região admissível, determinar e interpretar a solução óptima. No gráfico 3, pode observar-se os resultados obtidos do desempenho dos alunos.

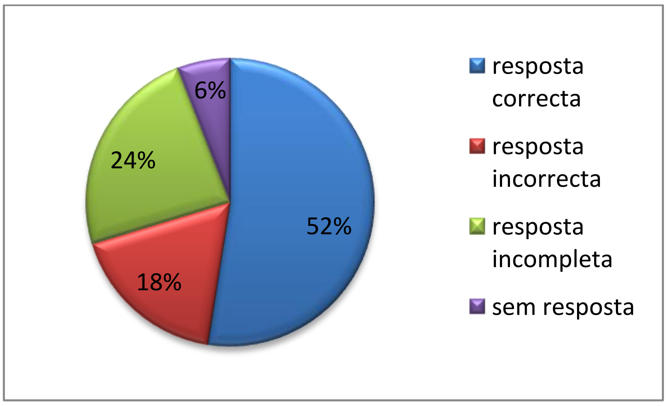


Gráfico 3. Frequências relativas (%) do desempenho dos alunos na questão 4.

Da análise do gráfico 3, podemos constatar que apenas metade da turma apresentou uma resolução correcta do problema.

Os alunos X10 e X11 não representam correctamente as equações no referencial cartesiano e, consequentemente, não determinam a região admissível deste problema. Esta situação foi resultado dos alunos terem utilizado de forma incorrecta a calculadora gráfica para determinar a região admissível e de não terem verificado o resultado obtido pela mesma.

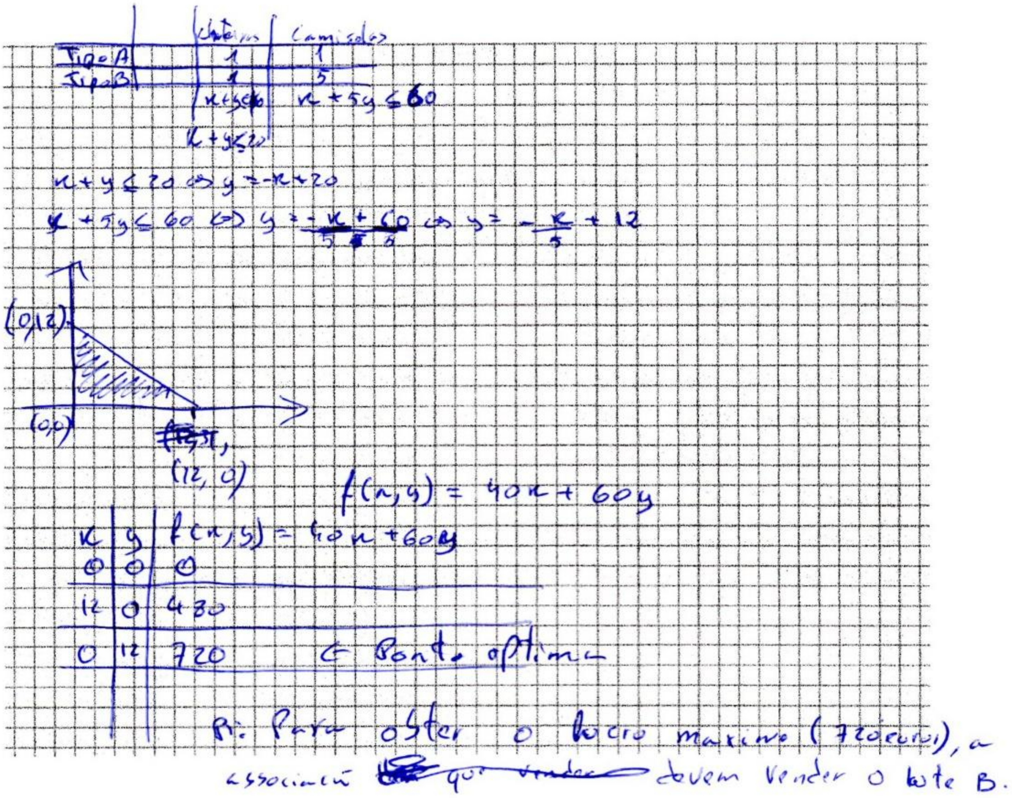


Fig. 42. Resposta do aluno X10 à questão 4.

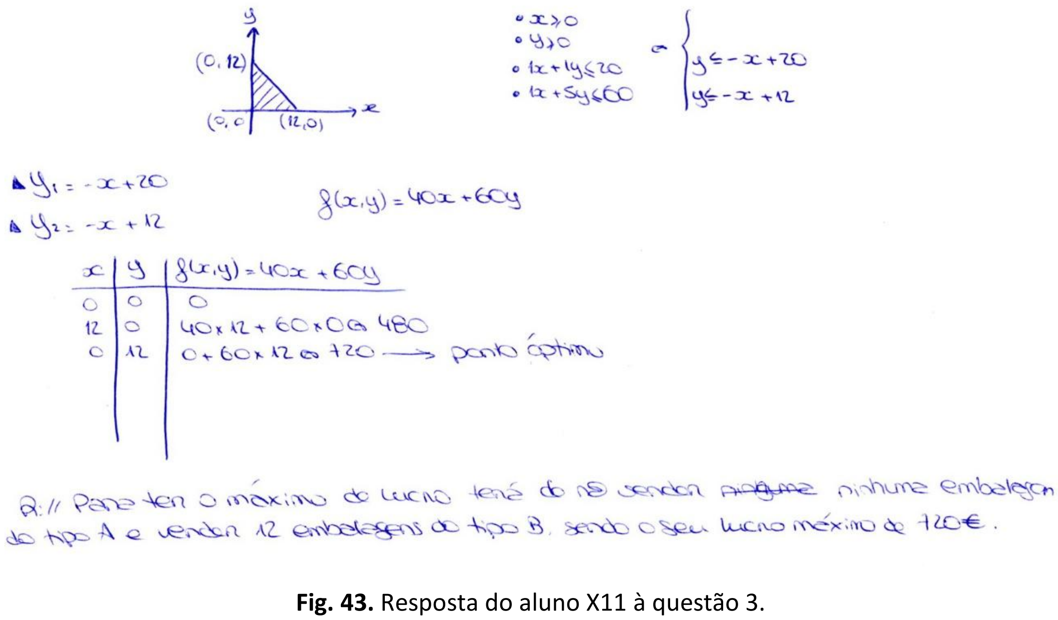


Fig. 43. Resposta do aluno X11 à questão 3.

O aluno X15 apresenta um erro no cálculo do valor óptimo da função objectivo, mas o resto da resolução está correcta.

Relativamente aos alunos que apresentam uma resposta incompleta, o aluno X1 não determina a solução óptima, o aluno X5 apresenta a tabela com os valores da função objectivo nos vértices, mas não identifica a solução óptima e os alunos X13 e X14 não interpretam a solução óptima que obtiveram.

O aluno X17 não resolveu a questão, os restantes alunos apresentam a resolução correcta.

Pretendeu-se, na questão 5, que os alunos analisassem o impacto de alterações na função objectivo. Neste caso, o efeito será a existência de mais do que uma solução óptima. No gráfico 4, são apresentados os resultados do desempenho dos alunos nesta questão.

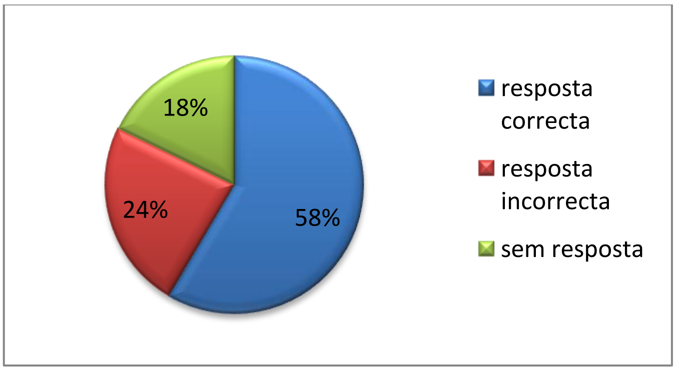


Gráfico 4. Frequências relativas (%) do desempenho dos alunos na questão 5.

Os alunos X10 e X11, como representaram incorrectamente a região admissível na questão anterior, nesta resolução cometem o mesmo erro.

Os alunos X13 e X14 apresentam a resposta final incorrecta, "A solução óptima do problema é 800€", confundido solução óptima com o valor óptimo da função objectivo.

Os alunos X1, X5 e X17 não resolveram a questão. As resoluções dos restantes alunos foram consideradas como correctas, apesar de os alunos terem determinado apenas duas soluções óptimas. Seguidamente, apresenta-se uma das referidas resoluções:

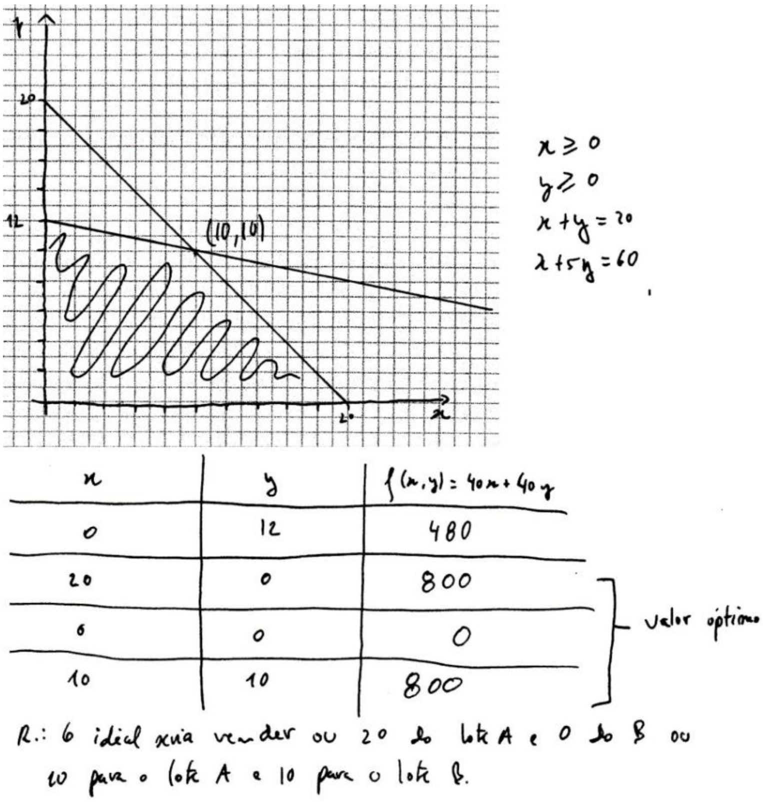


Fig. 44. Resposta do aluno X8 à questão 5.

Relativamente à questão 6, os alunos teriam que analisar o impacto das alterações realizadas na função objectivo e na introdução de uma nova restrição. Nesta questão, a região admissível será alterada. Seguidamente, apresenta-se no gráfico 5 os resultados do desempenho dos alunos nesta questão.

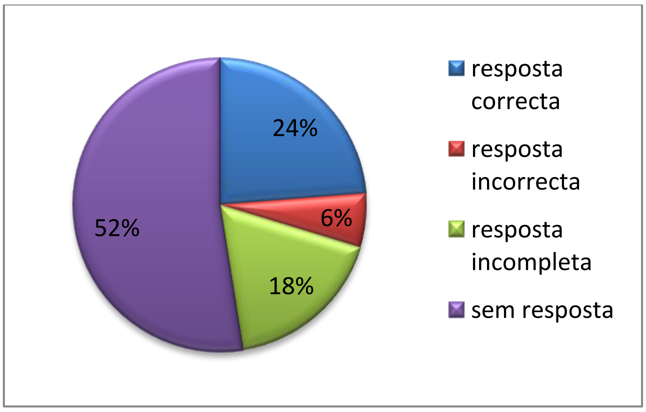


Gráfico 5. Frequências relativas (%) do desempenho dos alunos na questão 6.

Da análise do gráfico 5, podemos observar que a maioria dos alunos não resolveu a questão. Analogamente à questão anterior, as resoluções dos alunos X6, X7, X8, e X15 foram consideradas como correctas, apesar de apresentarem apenas duas soluções óptimas.

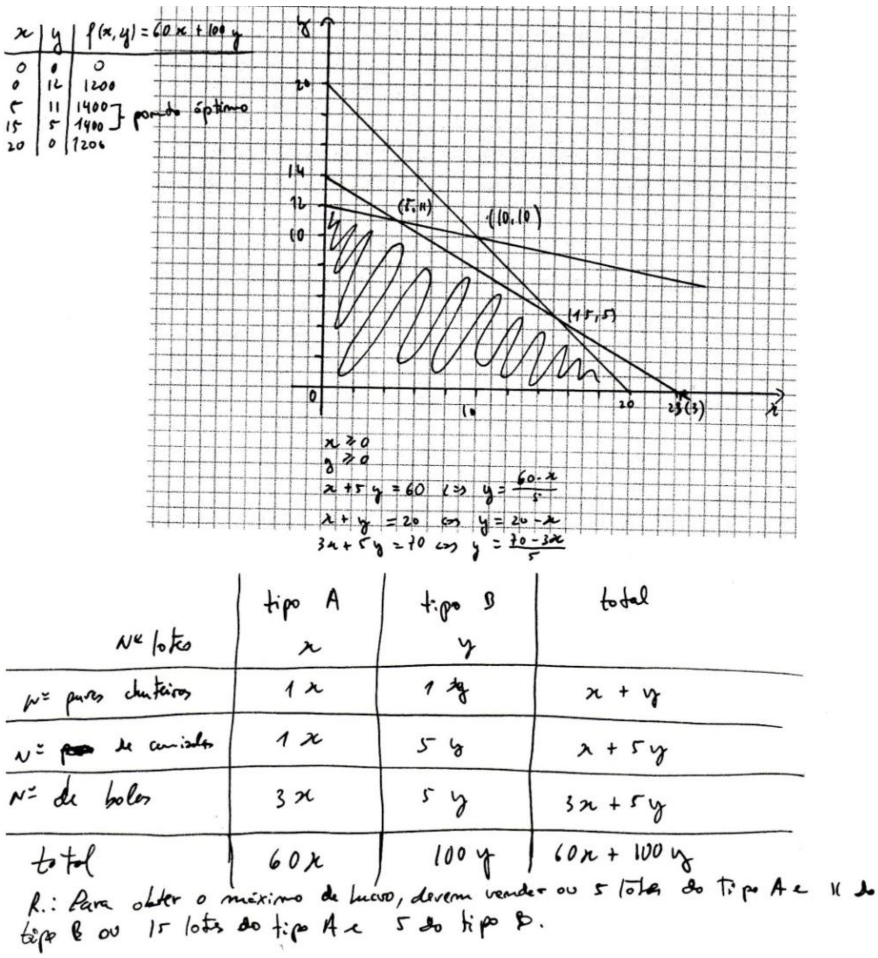


Fig. 45. Resposta do aluno X8 à questão 6.

O aluno X11, à semelhança das questões 4 e 5, não representa correctamente a região admissível. Relativamente aos alunos que apresentam uma resposta incompleta, o aluno X9 não interpreta a solução óptima, aluno X12 não determina a solução óptima, aluno X15 apresenta, como resposta, apenas uma solução óptima e o aluno X16 apresenta unicamente a representação gráfica da região admissível.

Nas questões 5 e 6, como o professor tinha abordado apenas o método analítico, ou seja, a determinação da solução óptima através da substituição na função objectivo das coordenadas dos vértices do polígono, os alunos não identificam outras soluções. Para que os alunos deduzissem que todos os pontos do segmento de recta que une os dois vértices, correspondentes às soluções óptimas que encontraram, são também soluções óptimas, era necessário que os alunos tivessem optado pelo método gráfico de determinação da solução óptima. Dado que o número de lotes é inteiro, os alunos teriam também que identificar quais os pontos de coordenadas inteiras que pertencem ao referido segmento de recta que são solução óptima do problema.

Conclusões e limitações

A tarefa proposta neste estudo permitiu através da sua análise identificar algumas das dificuldades dos alunos, de uma turma do 12º ano do Ensino Profissional, na resolução de problemas que envolvem a Programação Linear. A tarefa seleccionada, de acordo com os objectivos do estudo definidos e de contexto apelativo para os alunos, revelou-se adequada ao grau de complexidade das questões um, dois, três e quatro, resolvidas com a utilização do método analítico. No que se refere às questões cinco e seis, verificou-se que os alunos desconheciam a resolução através do método gráfico, o que os impediu de determinar todas as soluções do problema. Estas questões poderiam ser o ponto de partida para abordar a determinação da solução óptima, através do referido método. Na exploração deste tema é fundamental explorar, com os alunos, o método gráfico de resolução.

Na aplicação da matemática a situações do mundo real, podemos considerar três fases: a tradução da situação-problema num modelo matemático formal, a resolução do problema matemático e a interpretação da solução para a situação real.

No processo de resolução da tarefa, apesar de alguns alunos apresentaram dificuldades em representar graficamente equações e inequações lineares e de não interpretaram a solução em contexto real, a fase em que os alunos apresentaram maior dificuldade, foi na tradução algébrica do enunciado do problema, ou seja, na formulação matemática do problema.

Na resolução de um problema de Programação Linear, se o problema tiver duas ou três variáveis de decisão e um número reduzido de restrições, a determinação da solução óptima pode requerer apenas a abordagem analítica ou geométrica. Contudo, será necessário recorrer ao uso de softwares de Programação Linear, quando os problemas envolvem muitas variáveis e restrições. Estes softwares permitem, para além da resolução do problema inicial, analisar alterações feitas, quer na introdução de mais variáveis ou restrições, quer na alteração dos coeficientes do problema. Deste modo, o uso do computador permite ao aluno interpretar o significado real das situações propostas e das alterações a essas realizadas, bem como analisar as consequências práticas no mundo real das soluções que obtiver, para além da realização de tarefas de cálculo e de representações gráficas. Devido ao prazo imposto para o trabalho, não foi possível propor uma actividade para os alunos realizarem com recurso ao computador.

Da leitura dos programas de matemática para o ensino secundário, conclui-se que o contexto metodológico onde se insere o tema da Programação Linear é a modelação de situações reais e a resolução de problemas, sendo possível através de uma proposta didáctica adequada, abordar todos os temas transversais.

Importa realçar que o carácter da Programação Linear, permite que os professores proponham problemas reais e apelativos para os alunos e, desta forma, que estes possam reconhecer as aplicações reais da matemática, motivando-os para a sua aprendizagem.

Pode concluir-se que o processo de modelação é complexo e a formulação matemática tem uma componente cognitiva significativa, a qual requer a construção e manipulação de representações dos elementos do problema.

Bibliografia

Bazaraa, M. S., Jarvis, J. J. & Sherali, H. D. (1990). Linear programming and network flows (2ª Edição). New York: Jonh Wiley & Sons.

Carmo, H. (1998). *Metodologia de investigação: guia para auto-aprendizagem*. Lisboa: Universidade Aberta.

Castillo, G. (2000). *Investigação Operacional e Optimização: II Programação Linear (PL)*. Recuperado em 15 de Junho de 2011, de http://www2.mat.ua.pt/disciplinas/io/Documentos/Apontamentos/CapituloII_3.pdf.

Dantzig, G. B. (1963). *Linear Programming and Extensions*. New Jersey: Princeton University Press.

DES (1995). *Matemática 10º, 11º e 12º anos – Programa*. Lisboa: Ministério da Educação.

Filipe, J. (1998). Programação Linear: relato de uma experiência. *Revista Educação e Matemática*, 49, 25-32.

Goldbarg, M. C. & Luna, H. P. L. (2005). *Optimização Combinatória e Programação Linear: modelos e algoritmos* (2ª Edição). Rio de Janeiro: Editora Campus.

Hill, M. M. & Santos, M. M. (1999). *Investigação Operacional* (Vol. 1) *Programação Linear* (1ª edição). Lisboa: Edições Sílabo.

Jorge, A. M. B., Alves, C. B., Fonseca, G. & Barbedo, J. (2009). *Infinito 11 A*. Porto: Areal Editores.

Loureiro, C., Oliveira, A. F., Ralha, E. & Bastos, R. (1998). *Brochura de Matemática – Geometria 11º ano*. Editorial do Ministério da Educação.

Nascimento, M. J. T. (2004). *Programação linear: uma proposta de intervenção didáctica no ensino secundário*. Tese de mestrado, Universidade de Trás-os-Montes e Alto-Douro, Vila Real, Portugal.

NCTM. (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática. (Obra original publicada 2000).

Ponte, J. P., Boavida, A. M., Graça, M., & Abrantes, P. (1997). *Didáctica da Matemática – Ensino Secundário*. Lisboa: Departamento do Ensino Secundário – Ministério da Educação.

Ramalhete, M., Guerreiro, J. & Magalhães, A. (1984). *Programação Linear* (Vol. 1). Lisboa: McGraw-Hill.

Silva, J. S. (1975). *Guia para a utilização do Compêndio de Matemática* (Vol. 1) *Curso Complementar do Ensino Secundário*. Lisboa: Gabinete de Estudos e Planeamento do Ministério da Educação e Investigação Científica.

Silva, J. S. (1977). *Guia para a utilização do Compêndio de Matemática* (Vol. 2 e 3) *Curso Complementar do Ensino Secundário*. Lisboa: Gabinete de Estudos e Planeamento do Ministério da Educação e Investigação Científica.

Silva, J. C., Fonseca, M. G., Martins, A. A., Fonseca, C. M. C. & Lopes, I. M. C. (2002a). *Matemática A – 11º Ano*. Lisboa: Departamento do Ensino Secundário – Ministério da Educação.

Silva, J. C., Fonseca, M. G., Martins, A. A., Fonseca, C. M. C. & Lopes, I. M. C. (2002b). *Matemática B – 12º Ano*. Lisboa: Departamento do Ensino Secundário – Ministério da Educação.

Silva, J. C., Martins, A. A., Fonseca, C. M. C., Fonseca, I. M. C., Loura, L. C. S., Martins, M. E., Fonseca, M. G. (2005). *Programa – Componente de Formação Científica – Disciplina de Matemática*. Lisboa: Direcção-Geral de Formação Vocacional – Ministério da Educação.

Tavares, L. V., Oliveira, R. C., Themido, I. H. & Correia, F.N. (1996). *Investigação Operacional*. Lisboa: McGraw-Hill.

Tuckman, B. (2005). *Manual de Investigação em Educação : como conceber e realizar o processo de investigação em Educação*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Ulep, S. A. (1990, Jan). An Intuitive Approach in Teaching Linear Programming in High School. *Mathematics Teacher*, pp. 54-57.